

Approche théorique de l'harmonie – son - note – gamme- accord

Dans ce document nous proposons quelques éléments de base permettant peut être de mieux comprendre la manière dont sont définies les notes, les gammes et les accords en musique. L'approche se fait par les mathématiques un peu comme un exercice.

Dans cette approche, afin d'aborder la notion de vibration nous étudierons préalablement et de manière très synthétique le comportement des cordes vibrantes (guitare, violon, piano, ...). Nous verrons très succinctement une généralisation des résultats puis procéderons à diverses constructions de systèmes de notes, puis de gammes puis d'accords.

Ici pas de solfège, mais seulement des calculs de rapports à la recherche d'échelle de notes permettant de produire des consonances. Et puis si cela est trop rébarbatif, écoutez Mozart, Miles Davis, Jaco Pastorius, ..., Dream Theater. Ou passez voir la troupe des rats pas triés.

Franck

Sommaire

Introduction	2
Le son.....	3
Cordes vibrantes	3
Rapport harmonique	6
Généralisation, décomposition spectrale.....	8
Construction de suites de sons.....	9
Progression de Pythagore – gamme des quintes.....	9
Progression de Zarlino – gamme des accords parfaits	20
Gamme tempérée	24

Introduction

La diversité des choses est une réalité. Le fait que cette diversité puisse être partiellement adressée par des représentations intellectuelles en est une autre. Les réflexions actuelles, notamment autour de l'étude des systèmes vivants s'entendent globalement pour dire que cette diversité est le produit visible de systèmes fortement non linéaires en interaction permanente.

- *Tu parles en dormant ? Ouais tu veux parler des boucles de rétroaction, moi ce que j'en retiens c'est l'effet larsen...vive le rock et les amplis Marshall et le Gain à donf*

Ces évolutions en apparence désordonnées ne le sont pas tant que cela. Derrière ces situations chaotiques en apparence il existe trace d'un ordre. La structuration (ou la structure) est une expression de cet ordre. La structure quand on cherche à déterminer l'organisation d'un système existant, la structuration préalablement à la mise en place d'un système par exemple.

Dans ce document nous approchons très légèrement quelques notions de musique. La musique est du ressort de l'art, elle s'adresse à la sensibilité, à l'émotion, ... mais elle s'exprime aussi dans un monde physique dont certaines structures ont été extraites et exprimées dans un système de pensée qui cherche à être cohérent comme les mathématiques et les sciences physique. La musique est aussi une activité humaine, sa compréhension s'inscrit aussi dans un cadre historique.

Même si l'un ne va pas sans l'autre, ce document reste très restreint il ne fera qu'effleurer le sujet sur un plan scientifique et légèrement pratique. Le considérer comme une promenade, un jeu, une récréation, rien de plus.

- *Ça promet, ... c'est quand qu'on joue ... tu t'prends pour Kant ?*

Le son

Le son est la propagation d'une énergie mécanique dans un milieu élastique, l'eau, l'air, un matériau. Un son se propage, il a un caractère ondulatoire, ce n'est pas assimilable à un point matériel, une bille, un corps en mouvement dans un milieu, c'est d'avantage la perturbation de ce milieu et les champs de pression résultants. Les fréquences audibles sont contenues entre 30 et 20Khz.

- Hé man, c'est quoi une fréquence ? ... je blague ... ça pulse

Nous allons voir très vite qu'un son est à la fois une intensité, une énergie qui s'exprime dans le temps, mais aussi un ensemble de vibrations qui se caractérisent par des fréquences, des harmoniques.

Cordes vibrantes

Pour exprimer ce caractère ondulatoire nous prenons le cas d'une corde vibrante. Nommons T sa tension, μ sa densité linéique de masse, et U l'amplitude de la corde avec pour origine sa position au repos (les deux extrémités fixées). On montre en appliquant le principe de la dynamique classique en un point de la corde, en supposant cette dernière très longue et la perturbation initiale faible, que la forme de la corde dans le temps et l'espace peut être représentée par une fonction solution d'une équation :

$$\partial_x^2 U = \frac{\mu}{T} \partial_t^2 U, \text{ on pose } \frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{T}$$

Notons que ce type de manipulation mathématiques (calcul différentiel) et les lois de la mécanique qui nous permettent de les écrire résultent d'une longue maturation exprimée à la fois par Gottfried Wilhem Leibnitz (1646-1716) et Isaac Newton (1642-1727).

- Trop facile, j'aime bien les e inversés, ça fait tag... mais ça se li comment de gauche à droite, de droite à gauche de haut en bas en diagonale ou un mélange ... ça représente l'accélération non ? Plus vite ça accélère dans le temps, plus vite ça accélère dans l'espace ... bon accélère, il est où le mode Phrygien ...

La question de l'harmonie se posait déjà dans la civilisation Grec à l'époque de la communauté de Pythagore. Ces facilités leurs étaient inconnus, ils travaillaient avec des outils moins élaborés (la division, la multiplication par exemple).

- T'en sais des trucs...

On peut écrire U comme produit de fonctions d'une variable : $U(x,t) = g(x)f(t)$ et ramener le problème à la résolution de deux équations linéaires.

$$g'' = -k^2 g \text{ et } f'' = -\omega^2 f$$

En ayant introduit $-k^2$ comme constante de sorte à ce que la solution ne diverge pas et $\omega = kV$

Les solutions sont de la forme :

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), g(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx)$$

Si L est la longueur de la corde alors les conditions aux limites sont $U(0,t)=U(L,t)=0$ ceci permet de dire que :

$$C = 0 \text{ et } k = \frac{n\pi}{L}$$

Du fait de la linéarité de l'équation, toute combinaison linéaire de solutions à l'équation est aussi solution, ainsi on peut écrire la superposition suivante :

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x)$$

La forme de la corde au départ est $u_0(x) = U(x, 0)$ et la vitesse $U'(0,t) = v_0(t)$ ceci permet de déterminer les suites de coefficients a et b. En utilisant notamment la propriété d'orthogonalité des fonctions en jeu.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \text{ et } b_n = -\frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Les termes a_n et b_n sont décroissants.

- Ok Ok Ok ...

Retenons aussi :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \omega_n = n \frac{\pi V}{L}$$

Ceci met en évidence des modes de pulsation propres à la corde, ils sont physiquement liés à sa tension, à sa densité de masse et à sa longueur. Il y'a deux fréquences, une fréquence spatiale (suite k) et une fréquence temps (w). C'est cette seconde qui va nous intéresser maintenant.

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = \pi V, \omega_2 = 2\pi V, \omega_3 = 3\pi V, \dots$$

$$\omega_1 = \pi \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Si je tends deux fois plus je multiplie par racine de deux, et je ne double pas, en revanche si je divise la corde en deux je double la pulsation (donc la fréquence).

Ainsi sur une corde de longueur unité si on dit que l'octave d'une pulsation est le double de sa fréquence, la suite des longueurs suivantes décrit des octaves.

$$o_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, \dots, m, \dots \text{entier naturel}$$

- Ça donne quoi sur ma gratte ?

Rapport harmonique

A présent nous considérons deux cordes, ces cordes sont de même nature même tension mais ont une longueur différente. Nous avons vu que les fréquences (pulsations) propres sont $\omega_n(L) = n \frac{\pi V}{L}$.

Nous allons définir le recouvrement harmonique par l'ensemble de toutes les harmoniques que les deux cordes ont en commun. Nous allons procéder par la détermination du recouvrement harmonique de deux cordes « à la quinte » « à la tierce majeure » à la « septième ». Nous avons vus que lorsque l'on divise la longueur par un nombre donné on multiplie les pulsations propres.

Si je cherche L qui triple la fréquence et la ramène à l'octave du dessous, on trouve $L=2/3$ écrivons la suite des harmoniques :

$$\omega_n = \frac{3}{2} n \pi V$$

Ensuite je cherche toutes les fréquences en commun, ce qui donne l'équation :

$$m \pi V = \frac{3}{2} n \pi V \Leftrightarrow 2m = 3n$$

De manière générale, si je multiplie par M et revient à l'octave de la fondamentale en divisant par R l'équation à résoudre dans N est la suivante :

$$M.m = R.n, m = Rk \text{ et } n = Mk \text{ est solution}$$

- Tu connais les voyelles ?

Voici donc quelques résultats :

	M=3	R=2	M=5	R=4	M=6	R=4	M=7	R=4	M=9	R=8
k	m	n	m	n	M	n	M	n	m	n
1	3	2	5	4	6	4	7	4	9	8
2	6	4	10	8	12	8	14	8	18	16
3	9	6	15	12	18	12	21	12	27	24
4	12	8	20	16	24	16	28	16	36	32
5	15	10	25	20	30	20	35	20	45	40
6	18	12	30	24	36	24	42	24	54	48
7	21	14	35	28	42	28	49	28	63	56
8	24	16	40	32	48	32	56	32	72	64
9	27	18	45	36	54	36	63	36	81	72
10	30	20	50	40	60	40	70	40	90	80
11	33	22	55	44	66	44	77	44	99	88
12	36	24	60	48	72	48	84	48	108	96
13	39	26	65	52	78	52	91	52	117	104

14	42	28	70	56	84	56	98	56	126	112
15	45	30	75	60	90	60	105	60	135	120
16	48	32	80	64	96	64	112	64	144	128
17	51	34	85	68	102	68	119	68	153	136
18	54	36	90	72	108	72	126	72	162	144
19	57	38	95	76	114	76	133	76	171	152
20	60	40	100	80	120	80	140	80	180	160
21	63	42	105	84	126	84	147	84	189	168
22	66	44	110	88	132	88	154	88	198	176
23	69	46	115	92	138	92	161	92	207	184

- *Moi je préfère quand c'est rouge orange et bleu*

Si on s'arrête à l'harmonique de position 70 on voit que le rapport de quinte (3/2) est celui qui bénéficie d'un plus grand rapport harmonique, presque le double. En supposant qu'il y ait un rapport avec le son produit ces derniers ont plus d'éléments en commun. Ils portent une information commune plus importante que pour la tierce la septième, la quarte etc.

Généralisation, décomposition spectrale

Nous avons vu précédemment que la vibration de notre corde, à priori n'ayant pas de caractère sinusoïdal est limite d'une suite de fonctions sinusoïdale. Un Théorème mathématique énonce que toute fonction continue, dérivable et périodique est limite d'une série de fonctions sinus et cosinus.

Ce théorème s'applique aussi à des fonctions non périodiques. L'idée là-dessous est que les fonctions mathématiques constituent un ensemble structuré, sur lequel on peut faire des calculs. On peut définir une métrique sur cet ensemble et à partir de celle-ci calculer des distances.

Cette métrique introduit la notion de produit scalaire (ou hermitien en considérant le corps des nombres complexes), on peut donc introduire la notion d'orthogonalité, d'indépendance linéaire entre familles de fonctions. Ainsi un ensemble de fonctions peut être engendré par des fonctions de base. Le cas de Fourier (une base des mathématiques pour l'étude des signaux) c'est les fonctions sinus cosinus ou dans le cadre des nombres complexes l'exponentielle (qui généralise sur ce plan les deux précédentes fonctions).

- *Hermitien toi-même ... ils sont où les triangles rectangle dans ton Bazard...il devient fou*

On dit tout cela pour faire ressortir d'une part que ce n'est qu'une représentation mathématique, l'interprétation physique est délicate. En revanche, on a deux systèmes de représentation, une représentation en temps (ce qu'on entend, l'intensité) mais aussi une représentation en fréquence (caractérise la pulsation des fonctions de bases dont le signal en temps est la somme). On a un plan harmonique basé sur ces fréquences et le rapport entre ces fréquences.

- *Ouai je me souviens quand j'étais gosse de Louis et ses ondelettes ...*

Nous allons donner quelques symboles mathématiques. Si on représente ce signal dans le temps, son intensité par exemple on obtient une information représentée par une certaine fonction :

$$f : t \rightarrow f(t)$$

Nous avons rappelé un résultat très intéressant des mathématiques exprimant qu'il existe une autre représentation de ce signal en fréquence :

$$F : \omega \mapsto F(\omega)$$

Ainsi un signal peut être représenté par une fonction en fréquences, une telle représentation est appelée spectre du signal et les couples $(\omega, F(\omega))$ les harmoniques.

- *C'est beau ces trucs qu'on peu représenter de plein de manièretrop fort Fourier*

En fait F est la décomposition de f sur un ensemble de fonctions orthogonales de la forme :

$$u(t, \omega) \mapsto e^{-i\omega t}$$

- *Et je coupe le son ...*

Construction de suites de sons

Nous avons évoqué précédemment que l'écart entre deux sons ne s'établit pas par une différence de fréquences au sens arithmétique du terme mais par un rapport.

En effet quand on double la fréquence d'un son on obtient le même son plus aigue. Il est à l'octave, quand on multiplie par un entier quelconque multiple de deux on obtient une octave.

Quand on multiplie par un nombre impaire on construit d'autres sons mais dont le par rapport harmonique est plus nuancé.

Nous allons construire une suite de fréquences en partant d'un son unité (fréquence 1) pour rester « dans la gamme » c'est-à-dire rester au dessous de l'octave et au dessus de 1, la suite construite va être majorée par 2.

En terme mathématique on construit une suite de nombres rationnels :

$$\{u_n \in \mathbb{Q} \cap [1, 2[, n \in \mathbb{N}\}$$

- *Tu peux vraiment pas t'en empêcher ...*

Le procédé de construction est établi de manière à ce que la suite soit harmoniquement intéressante. Si on procède par multiplication par un multiple de 2 on tombe toujours sur la même note. C'est un peu limite.

Progression de Pythagore – gamme des quintes

En multipliant par 3 on obtient la quinte. Si on revient à la gamme on divise le résultat par deux. On va définir notre première structure de cette manière. En calculant la suite des quintes contenus dans l'intervalle [1, 2[. Ce procédé est dû aux disciples de Pythagore.

Mais avant proposons une petite remarque. Si nous faisons $u_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)u_n$ (si le résultat obtenu est au dessus de 2 on divise par 2) alors la note u_n obtenue est la quinte de u_{n+1} . Mais prenant une note quelconque on peut s'intéresser à la note dont elle est la quinte. Le procédé de construction est alors le suivant : $v_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)v_n$. On multiplie par deux quand on est au dessous de 1.

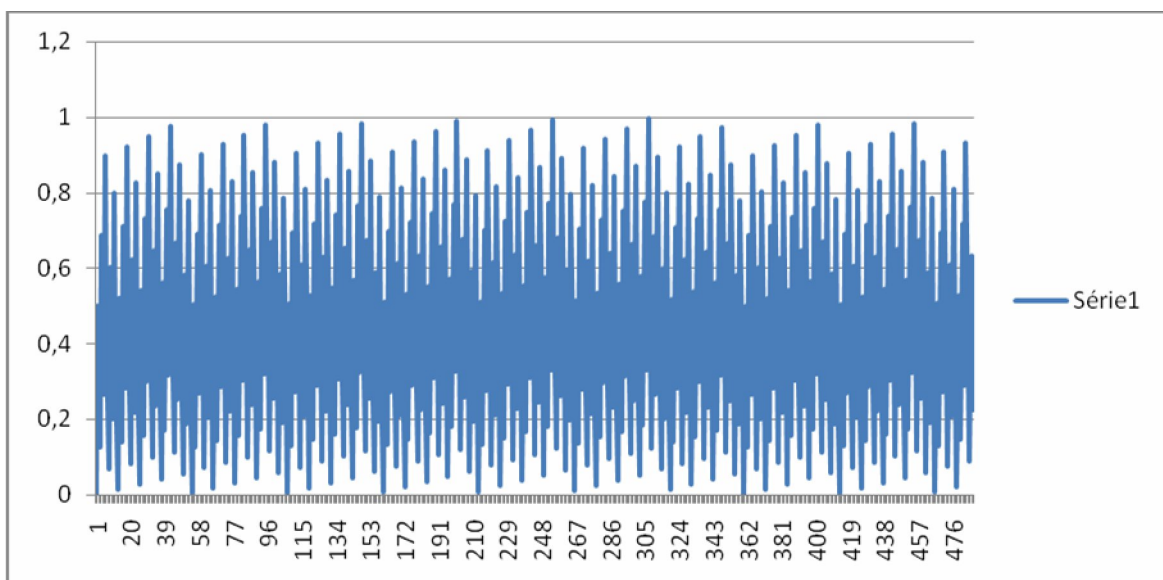
Les deux suites **u** et **v** permettent de tronçonner l'intervalle en plusieurs de pas irrégulier mais dont le rapport harmonique intéressant. La suite U défini les quintes ascendantes, et la suite des V les quintes descendantes.

Dans un premier temps, par curiosité on effectue un certain nombre d'itérations. Un programme informatique peut être écrit, cela a été fait par exemple sur les quintes ascendantes, au bout de plus de plus de 4 000 000 d'itérations nous n'avons trouvé aucun signe de périodicité, c'est-à-dire que jusque là toutes les valeurs de U ont été différentes.

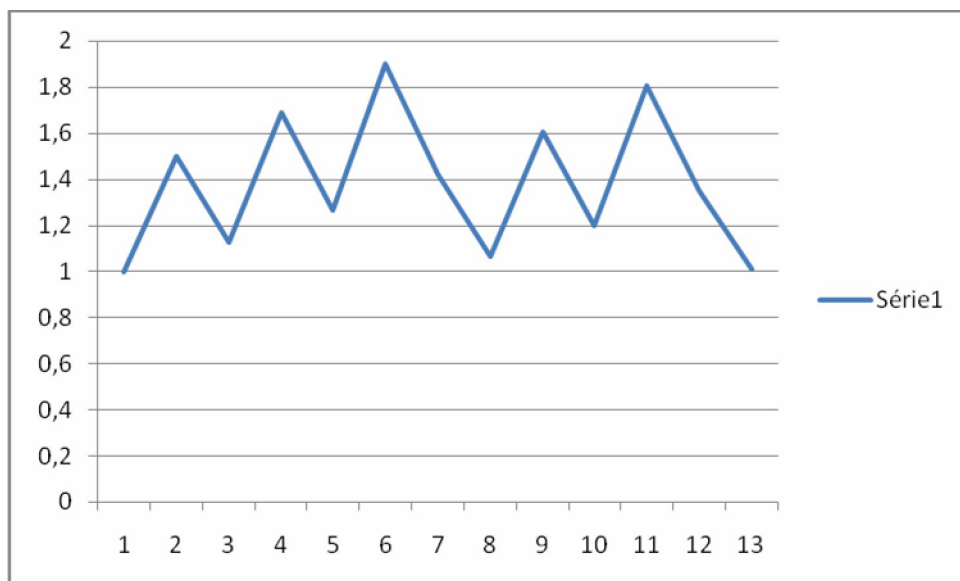
- *Tu bosses ou ?*

Le calcul sur mille itérations donne pourtant la sensation de périodicités, mais c'est un leur, car cela se joue à de petites proportions. Si on fait des approximations alors oui on trouve des périodes. Mais n'est ce que pas ce que fait notre système?

Ci-dessous nous avons représenté la suite des valeurs U_n (avec une translation de 1 à gauche)



Si on regarde les 12 premières itérations :



Le « presque » évoqué avant peut être accepté, la « distance » entre la fondamentale de 1 et la valeur du rang 13 est de 1,01364327.

- *Tu as de bonnes lunettes ...Excel c'est plus fort que toi ...*

On va donc construire nos deux suites jusqu'à l'ordre 12 et obtenir alors 25 notes.

1	1	1000	DO	1	1	1000	DO
1,5	1,5	1500	SOL	0,666666667	1,333333333	1333,33333	FA
2,25	1,125	1125	RE	0,888888889	1,777777778	1777,77778	Sib
1,6875	1,6875	1687,5	LA	1,185185185	1,18518519	1185,18519	Mib
2,53125	1,265625	1265,625	MI	0,790123457	1,58024691	1580,24691	Lab
1,8984375	1,8984375	1898,4375	SI	1,053497942	1,05349794	1053,49794	Reb
2,84765625	1,42382813	1423,82813	FA#	0,702331962	1,40466392	1404,66392	SOLb
2,13574219	1,06787109	1067,87109	DO#	0,936442615	1,87288523	1872,88523	Dob
1,60180664	1,60180664	1601,80664	SOL#	1,248590154	1,24859015	1248,59015	Fab
2,40270996	1,20135498	1201,35498	RE#	0,832393436	1,66478687	1664,78687	Sibb
1,80203247	1,80203247	1802,03247	LA#	1,109857915	1,10985791	1109,85791	Mibb
2,70304871	1,35152435	1351,52435	MI#	0,739905276	1,47981055	1479,81055	Labbb
2,02728653	1,01364326	1013,64326	SI#	0,986540369	1,97308074	1973,08074	Rebbb

On procède alors à un arrangement de nos deux suites, on les mélange de manière à obtenir une nouvelle W mais croissante. C'est-à-dire que l'on range les éléments de U et de V dans l'ordre croissant.

Les valeurs obtenues pour W sont les suivantes.

1
1,01364327
1,05349794
1,06787109

1,10985792
1,125
1,18518519
1,20135498
1,24859015
1,265625
1,33333333
1,35152435
1,40466392
1,42382813
1,47981055
1,5
1,58024691
1,60180664
1,66478687
1,6875
1,77777778
1,80203247
1,87288523
1,8984375
1,97308074

Nous donnons des noms à ces valeurs :

DO	1
SI#	1,01364327
Reb	1,05349794
DO#	1,06787109
Mibb	1,10985792
RE	1,125
Mib	1,18518519
RE#	1,20135498
Fab	1,24859015
MI	1,265625
FA	1,33333333
MI#	1,35152435
SOLb	1,40466392
FA#	1,42382813
Labb	1,47981055
SOL	1,5
Lab	1,58024691
SOL#	1,60180664
Sibb	1,66478687
LA	1,6875
Sib	1,77777778
LA#	1,80203247
Dob	1,87288523
SI	1,8984375
Rebb	1,97308074

Le procédé est le suivant : pour les six premiers termes de la suite ascendante on donne des noms non altérés, puis on ajoute # ensuite. Pour les termes des quintes descendantes on altère à partir du troisième terme avec le symbole b.

- *Altéré toi-même, va boire un coup ça ira mieux*

On obtient ainsi la suite dite de Pythagore.

Pour obtenir une gamme heptatonique, c'est-à-dire constituée de 7 notes on va éliminer un certain nombre d'éléments.

Tout d'abord on calcul la « distance » entre chaque note, c'est-à-dire le rapport.

- *Quoi ? pour calculer la distance entre deux points du divises ... mais je soustrais ... face d'isomorphisme*

Tout calcul fait

DO	Distance
SI#	1,01364327
Reb	1,03931825
DO#	1,01364327
Mibb	1,03931825
RE	1,01364326
Mib	1,05349794
RE#	1,01364327
Fab	1,03931825
MI	1,01364327
FA	1,05349794
MI#	1,01364327
SOLb	1,03931825
FA#	1,01364327
Labb	1,03931825
SOL	1,01364327
Lab	1,05349794
SOL#	1,01364327
Sibb	1,03931825
LA	1,01364327
Sib	1,05349794
LA#	1,01364327
Dob	1,03931825
SI	1,01364327
Rebb	1,03931825

- *Ok j'te crois*

On constate que la plus petite distance 1,01364327 se retrouve, comme on a dit que c'était négligeable « de manière à rendre le système périodique » on élimine tous les éléments proche de cette valeurs d'une note donnée. Mais on y va doucement, on commence par supprimer toutes les notes altérées les plus proches des notes non altérées

f	n	d(n,n-1)	
---	---	----------	--

1	DO	0	
1,05349794	Reb	1,05349794	1,05349794
1,06787109	DO#	1,01364326	1,06787109
1,125	RE	1,05349795	
1,18518519	Mib	1,05349795	1,05349795
1,20135498	RE#	1,01364326	1,06787109
1,265625	MI	1,05349794	
1,33333333	FA	1,05349794	
1,40466392	SOLb	1,05349794	1,05349794
1,42382813	FA#	1,01364327	1,0678711
1,5	SOL	1,05349794	
1,58024691	Lab	1,05349794	1,05349794
1,60180664	SOL#	1,01364327	1,06787109
1,6875	LA	1,05349794	
1,77777778	Sib	1,05349794	1,05349794
1,80203247	LA#	1,01364326	1,06787109
1,8984375	SI	1,05349794	
1,97308074	Rebb	1,03931825	1,03931825

On a calculé en dernière colonne la distance entre n et n-2 (c'est-à-dire à la note non altérée précédente la plus proche)

On procède un coup sur deux de manière à obtenir une distance des segments relativement homogène, on enlève donc Reb R# Solb Sol# Sib et Rebb (reste ainsi des éléments de la progression ascendante et de la progression descendante)

On obtient les valeurs de la gamme de Pythagore.

DO	1	d(n,n-1)
DO#	1,06787109	0,93644262
RE	1,125	0,94921875
Mib	1,18518519	0,94921875
MI	1,265625	0,93644262
FA	1,33333333	0,94921875
FA#	1,42382813	0,93644262
SOL	1,5	0,94921875
SOL#	1,60180664	0,93644262
LA	1,6875	0,94921875
Sib	1,77777778	0,94921875
SI	1,8984375	0,93644262

Si on regarde maintenant les écarts entre les notes ils sont variables. La progression des quintes ne produit pas une segmentation de l'intervalle [1,2] régulier.

Revenons à notre système initial

1	1	1000	DO	1	1	1000	DO
1,5	1,5	1500	SOL	0,666666667	1,333333333	1333,33333	FA
2,25	1,125	1125	RE	0,888888889	1,777777778	1777,77778	Sib
1,6875	1,6875	1687,5	LA	1,185185185	1,18518519	1185,18519	Mib
2,53125	1,265625	1265,625	MI	0,790123457	1,58024691	1580,24691	Lab
1,8984375	1,8984375	1898,4375	SI	1,053497942	1,05349794	1053,49794	Reb
2,84765625	1,42382813	1423,82813	FA#	0,702331962	1,40466392	1404,66392	SOLb
2,13574219	1,06787109	1067,87109	DO#	0,936442615	1,87288523	1872,88523	Dob
1,60180664	1,60180664	1601,80664	SOL#	1,248590154	1,24859015	1248,59015	Fab
2,40270996	1,20135498	1201,35498	RE#	0,832393436	1,66478687	1664,78687	Sibb
1,80203247	1,80203247	1802,03247	LA#	1,109857915	1,10985791	1109,85791	Mibb
2,70304871	1,35152435	1351,52435	MI#	0,739905276	1,47981055	1479,81055	Labb
2,02728653	1,01364326	1013,64326	SI#	0,986540369	1,97308074	1973,08074	Rebb

En jaune les notes éliminées.

- *Encore du jaune ... un peu borné l'garçon*

Il reste

1	DO	A
1,5	SOL	A
1,125	RE	A
1,6875	LA	A
1,265625	MI	A
1,8984375	SI	A
1,42382813	FA#	A
1,06787109	DO#	A
1,60180664	SOL#	A
1,333333333	FA	D
1,777777778	Sib	D
1,18518519	Mib	D

On remet dans l'ordre :

F	N	T
1	DO	A
1,06787109	DO#	A
1,125	RE	A
1,18518519	Mib	D
1,265625	MI	A

1,33333333	FA	D
1,42382813	FA#	A
1,5	SOL	A
1,60180664	SOL#	A
1,6875	LA	A
1,77777778	Sib	D
1,8984375	SI	A

Si on évalue les distances

f	n	T	D
1	DO	A	1
1,06787109	DO#	A	1,06787109
1,125	RE	A	1,05349795
1,18518519	Mib	D	1,05349795
1,265625	MI	A	1,06787109
1,33333333	FA	D	1,05349794
1,42382813	FA#	A	1,0678711
1,5	SOL	A	1,05349794
1,60180664	SOL#	A	1,06787109
1,6875	LA	A	1,05349794
1,77777778	Sib	D	1,05349794
1,8984375	SI	A	1,06787109

Par convention on va indiquer que l'écart entre deux éléments successifs de la gamme est un demi ton. Dans ce cadre si on écrit la gamme heptatonique, constituée par les notes non altérées on a une suite de :

$1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$

On peut déterminer d'autres suites ou modes par simple translation à gauche, ainsi on décrit 7 modes :

$1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$: ionien

$1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1$: dorien

$\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1$: phrygien

$1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2}$: lydien

$1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1$: mixolydien

$1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1$: aéloien

$\frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1$: locrien

- Sont beaux les noms

	DO	DO#	RE	Mib	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	Sib	SI	DO
1 - 1 - ½ - 1 - 1 - 1 - ½	X		x		X	x		x		x		x	X
1 - ½ - 1 - 1 - 1 - ½ - 1	X		x	X		x		x		x	x		X
½ - 1 - 1 - 1 - ½ - 1 - 1	X	x		X		x		x	x		x		X
1 - 1 - 1 - ½ - 1 - 1 - ½	X		x		x		x	x		x		x	X
1 - 1 - ½ - 1 - 1 - ½ - 1	X		x		x	x		x		x	x		X
1 - ½ - 1 - 1 - ½ - 1 - 1	X		x	X		x		x	x		x		X
½ - 1 - 1 - ½ - 1 - 1 - 1	X	x		X		x	x		x		x		X

Progression de Zarlin – gamme des accords parfaits

Nous avons vu pour le moment deux manières de produire des sons générateurs, la fondamentale et la quinte. La construction de la gamme de Pythagore a l'avantage de construire des quintes justes. En revanche, nous avons vu précédemment qu'il existe d'autres rapports entre note qui bénéficie d'un « recouvrement harmonique » assez riche. C'est le cas de la tierce ($5/4$).

La construction de Zarlin se base sur la notion d'accord parfait, c'est-à-dire le rapport une fondamentale, sa tierce et sa quinte.

La construction procède de la manière suivante :

- Considérer la fondamentale
- Calculer la tierce de la fondamentale
- Calculer la quinte de la fondamentale
 - Ceci donne trois notes : une première triade
- Considérer la quinte précédente
- Calculer la tierce de la quinte
- Calculer la quinte de la quinte
 - Ceci donne trois autres notes : une seconde triade
- On cherche la triade juste au dessous de la fondamentale, donc basé sur la note dont la fondamentale est la quinte : s'obtient en multipliant par $2/3$ et en ramenant à l'intervalle.
- Calculer la tierce de la note

- *J'écoute, j'écoute ...*

Tout calcul fait :

	fondamentale	Tierce	quinte
T1	1,0000	1,2500	1,5000
T2	1,5000	1,8750	1,1250
T3	1,3333	1,6667	1,0000

On donne les noms suivants :

T1	DO	MI	SOL
T2	SOL	SI	RE
T3	FA	LA	DO

Et on range dans l'ordre :

1	DO
1,125	RE

1,25	MI
1,3333	FA
1,5	SOL
1,6667	LA
1,875	SI

Comparons avec la progression de Pythagore :

Zarlin	Note	Pythagore	d(p,z)
1	DO	1	1
1,125	RE	1,125	1
1,25	MI	1,265625	1,0125
1,3333	FA	1,33333333	1
1,5	SOL	1,5	1
1,6667	LA	1,6875	1,01247975
1,875	SI	1,8984375	1,0125

- *C'est comme le bon vin, ça se bonifie en vieillissant*

Lors de l'établissement du système dit de Pythagore nous avons négligé les termes distants de l'ordre de 1,01364327, les distances sur les sont négligées aussi.

Calculons les écarts entre chaque note du système :

Zarlin	Note	
1	DO	
1,125	RE	1,125
1,25	MI	1,111
1,3333	FA	1,067
1,5	SOL	1,125
1,6667	LA	1,111
1,875	SI	1,125

Trois types d'écart :

1,125	do	re
	fa	sol
	la	si
1,111	re	mi
	sol	la
1,067	mi	fa
	si	do

- L'écart 1,125 est nommé ton majeur
- L'écart 1,111 est nommé ton mineur
- L'écart 1,067 est nommé demi-ton majeur.

On complète en introduisant le demi ton mineur 25/24, pour # on multiplie par un demi ton mineur, pour b par son inverse.

On construit ainsi la gamme chromatique de Zarlino, ensuite on procède à une élimination comme celle effectuée lors de l'étude précédente.

On peut aussi sans faire d'erreur utiliser les notations obtenue dans la gamme de pythagore pour écrire les différents accords.

DO	1	1,5	1,5	SOL	1,25	1,25	Mi
DO#	1,06787109	1,60180664	1,60180664	SOL#	1,33483887	1,33483887	fa
RE	1,125	1,6875	1,6875	LA	1,40625	1,40625	fa#
Mib	1,18518519	1,77777778	1,77777778	Sib	1,48148148	1,48148148	sol
MI	1,265625	1,8984375	1,8984375	Si	1,58203125	1,58203125	sol#
FA	1,33333333	2	2	Do	1,66666667	1,66666667	la
FA#	1,42382813	2,13574219	1,06787109	Do#	1,77978516	1,77978516	sib
SOL	1,5	2,25	1,125	RE	1,875	1,875	si
SOL#	1,60180664	2,40270996	1,20135498	Mib	2,0022583	1,00112915	Do
LA	1,6875	2,53125	1,265625	MI	2,109375	1,0546875	Do#
Sib	1,77777778	2,66666667	1,33333333	FA	2,22222222	1,11111111	Re
SI	1,8984375	2,84765625	1,42382813	FA#	2,37304688	1,18652344	Mib

- *Bon là tu as raccourcis ...*

Et le tableau des triades, ou accords parfaits :

DO	Mi	SOL
DO#	Fa	SOL#
RE	fa#	LA
Mib	Sol	Sib
MI	sol#	Si
FA	La	Do
FA#	Sib	Do#
SOL	Si	RE
SOL#	Do	Mib
LA	Do#	MI
Sib	Re	FA
SI	Mib	FA#

Reprenons la formulation des écarts nous ayant permis d'introduire les différents modes. Cette formulation donne des gammes à trois tons suivant 2-1,5

Cette méthode a l'intérêt d'introduire des tierces justes mais aussi des quintes justes, mais aussi d'autres fausses.

Tout ça pour 2 - 1,5 ... sont tous comme toi ?

Gamme tempérée

Considérons notre intervalle $[1,2[$ comment le décomposer en douze de manière à avoir un rapport identique entre la valeur de deux points consécutifs. Si p_n est la suite des points, le rapport $\frac{p_{n+1}}{p_n} = r$ doit être constant. Dans ce cas nous devons avoir $r^{12} = 2$, ainsi $\sqrt[12]{2} = r$.

On peut faire le calcul, dans ce mode la fausseté est partout, distribuée à peu près de la même manière.

Bin c'est fini ? OK sympa les grands S ... mais j' préfère jouer non ? Dits moi c'est quoi la distorsion ?

Ok on verra ça la prochaine fois après avoir transposé les éléments précédemment évoqués sur le manche d'une guitare. Au fait tu as écouté le dernier Steve Lukather ?