Visite du coté de la physique Théorique

Sommaire

Avant propos

Introduction

Principe des variations

- Du taux de variation à la dérivée
- De la dérivée à l'intégrale de Riemann
- De l'intégrale de Riemann à l'approximation polynomiale des fonctions au voisinage d'un point (Formule de Taylor-Lagrange)
- Recherche de points maximums et minimums
  - Quelques exemples de recherche d'optimum
  - Recherche de l'angle de tir envoyant un projectile le plus loin dans un champ de pesanteur constant
- Extension aux fonctions de plusieurs variables
- Autres exemples de recherche d'optimum
  - Loi de l'optique géométrique
  - Recherche de trajectoire de moindre temps

Etude sommaire des coniques

- Définition et caractérisation analytique des lieux géométriques

Principe de moindre action

- Le principe de moindre Action
- Equations de Lagrange
- Liaison avec la mécanique des forces
- Recherche d'invariants
  - Conservation de l'énergie
  - Conservation du moment cinétique
  - Une première expression du Lagrangien

Mécanique Lagrangienne – exemples

- Equations de mouvement dans un champ de force central
- Champ de Lagrangien, équation de mouvement des cordes vibrantes – approche Lagrangienne

Géométrie - espace et physique

- Etude des géodésiques – trajectoire de plus courtes distances entre deux points
  - Géométrie Euclidienne
  - Géométrie sur une sphère de rayon unité
  - Géométrie sur la surface engendrée par un cône
- Equation de mouvement, liaison avec les géodésiques
  - Relation entre métrique et gravitation ?

Electromagnétisme

- Théorème de l'induction magnétique
- Fonctionnement des micros d'une guitare électrique

Mécanique relativiste

- Transformations de Galilée – approximation – le défit porté par la Lumière
- Transformation de Lorentz – recherche d'invariants relativistes
- Dilatation du temps – contraction des longueurs – temps propre
- Géométrie de Minkowski – Espace Temps
- Transformation de Lorentz dans un cadre général
- Expression d'un Lagrangien à partir d'invariants relativistes
- Equivalence masse - énergie
- Potentiel de gravitation et métrique

Conclusion

Eléments de référence

Avant propos

Très chers lecteurs bonjour, voici un *« nouvel article »*, relativement technique, abordant très légèrement la physique théorique. Alors musicien d'eau douce, *« c'est assez marrant »* de prendre conscience, amateur, autodidacte, un jour comme ça en échangeant avec d'autres, qu'il existe une logique derrière tous les accords qu'on arrive péniblement à poser, puis aux suites de notes qu'on esquisse au dessus pour thème. Cette logique initialement intuitive, par l'oreille, la mélodie, le rythme, … l'harmonie se pose sur le papier en une multitude de situations particulières qui peu à peu se déduisent les unes des autres pour se réduire en substance à des concepts unifiés.

Nous le disions dans le premier document, la musique c'est aussi de la physique, et cette activité est particulièrement pertinente. C'est pour ma part une très belle construction de la pensée humaine. Elle reste toutefois avant tout une activité de modélisation et de confrontation au réel, *« Feed back permanent»*, on peut dire que c'est essayer de voir le monde par le haut tout en étant en bas, et pleinement conscient de cette place.

Les mathématiques sont cette forme *« de langage universel »* à partir duquel on exprime de plus en plus le comportement du monde réel. L'approche *« est très carrée »*, parfois presque austère, cela commence par la définition d'objets abstraits, puis à l'énoncé d'un ensemble de propriété et à la démonstration de ces propriétés. Et ça marche bien par trois, l'objet, des énoncés, des preuves. Les mathématiques sont le fruit de l'activité humaine, elles aussi portent une très belle construction, mais elles aussi ne sont ni exhaustives ni parfaites dans leur contenu.

Et des maths il va y'en avoir pas mal dans ce document, ce qui en pénalisera malheureusement la lecture, l'important il me semble était, à un moment, de poser sur le même papier, dans un continuum, cette idée quelque part fédératrice qu'est le principe de moindre action, de l'exprimer mathématiquement et d'en observer quelques applications.

Alors amis des guitares saturées, et des autres d'ailleurs, et plus généralement de la musique dans toute son épaisseur, à vos crayons, vos craies, …vos tableaux, je vous souhaite une très bonne lecture.

Franck

Introduction

Nous savons que les sciences physiques ont pour objet la matière, sa structure, ses propriétés et son évolution. C'est avant tout une activité expérimentale. Toutefois l'expérience produisant des nombres *(par le biais de mesures de grandeurs)*, puis par l'étude des corrélations entres grandeurs, avec toujours pour objectif celui de comprendre mais aussi de prédire *(au sens de l'ingénieur : de dimensionner).* Cela débouche sur des concepts, des théories et se prolonge naturellement par des mathématiques.

La physique théorique est cette discipline particulière. Elle complète la physique appliquée de descriptions formelles exprimées dans *« le langage »* des mathématiques. Elle constitue un outil parfois particulièrement pertinent permettant l'établissement de théories sur des objets difficilement observables pour deux raisons au moins, pour la première leur nature et pour la seconde les limites des techniques expérimentales de l'époque où elles sont produites. Ce que l'expérience ne nous montre pas encore, des structures mathématiques nous y invitent par certaines *« conjectures »* qui n'attendent que confirmation par la confrontation au réel, à l'expérience. C'est ce constant aller et retour qui constitue les sciences physiques et plus globalement toute activité scientifique.

Alors quand on pense à la physique Théorique il nous vient classiquement deux grandes théories. La première résulte d'un formidable travail de synthèse ayant débouché sur *« une physique nouvelle »,* dite moderne, propulsée par les publications d'Albert Einstein au début du 20 IIème siècle au sujet des théories de la relativité et de la gravitation. Pour la seconde c'est par exemple la découverte de l'anti matière par Dirac manipulant les mathématiques constituant la Mécanique Quantique. La physique Théorique est toutefois antérieure à ces deux théories, la mécanique dite classique a été formalisée par Lagrange puis Hamilton au 19^{ième} siècle. Traiter la physique sous la forme d'une axiomatique *« et à coups »* de théorèmes et de démonstrations, comme une branche des mathématiques…

Nous proposons d'orienter cet échange de la manière suivante. Une introduction préalable à quelques notions de calcul des variations *(calcul des dérivées des intégrales des développements en série)* que nous illustrerons bien entendu de quelques exemples. L'objectif ici étant de fournir le minimum des outils mathématique davantage vue sous l'angle du praticien que du théoricien.

Ensuite nous poserons quelques problèmes de variations. Le premier par exemple, emprunté à Maupertuis, celui de dire que l'évolution d'un système sans contraintes se fait en minimisant une certaine fonction. En bref l'évolution libre d'un système est économique au sens d'une fonctionnelle dont on cherche le minimum *(une fonctionnelle qui dépend des variables de position et de vitesses)*. Nous verrons que ce principe aboutit à des principes importants en mécanique comme le principe fondamental de la dynamique, la conservation de l'énergie, la conservation du moment cinétique. A titre d'illustration nous déterminerons l'équation de trajectoire *« des systèmes planétaires »*. Mais aussi aux équations de la relativité restreinte et de l'électromagnétisme. Nous ne le faisons pas mais on pourrait

en introduisant des variables d'impulsion et de position duales établir certaines équations des milieux continus, conservation de la matière, de la charge etc.

Le second problème des variations aura pour objet d'introduire davantage la structure géométrique dans les relations physiques. Nous y rencontrerons de manière superficielle des géométries non Euclidiennes. Nous déterminerons l'équation générale des chemins de plus courte distance. Nous remarquerons que les deux problèmes de variations précédents *(recherchent de trajectoire de systèmes libres et recherche des géodésiques)* mènent à des équations similaires ce qui invitera à penser que les systèmes libres se déplacent sur les chemins de plus courte distance. En étudiant à nouveau le cas des systèmes planétaires nous tenterons sans succès d'intégrer dans la métrique *(dans la géométrie)* des éléments liés à l'énergie de manière à voir si la gravitation ne serait pas une propriété de l'espace. C'est ce genre d'idée qui effleure la théorie moderne de la gravitation. Nous reprendrons toutefois le sujet de manière moins intuitive en fin de document sans toutefois entrer dans le détail de la théorie de la relativité générale nécessitant à elle seul le développement d'un outillage mathématique bien trop riche pour un tel document.

Nous donnerons des formes particulières au Lagrangien *(qui constitue la « fameuse » fonction de coût)* et établirons la célèbre loi de l'induction magnétique *(loi de Lentz)* en bref ce qui permet la production d'une grande partie de l'énergie électrique de nos civilisations. Mais dans un registre plus léger, c'est aussi ce qui permet d'avoir des guitares électriques. Nous ferons une petite pause à cet endroit, quand même.

A l'issu nous nous intéresserons aux lois de composition des vitesses et rappellerons pourquoi la loi de composition des vitesses de Galilée est insuffisante. Nous parlerons de la lumière. De son étrange comportement. Un objet conceptuellement déroutant et d'une richesse sans limite … que l'on soit physicien mystique croyant ou athée … la lumière c'est quelque chose. Nous aborderons les bases de la mécanique relativiste établirons les bonnes relations de transformations lors du passage d'un référentiel à un autre. Nous verrons que cette loi de transformation laisse invariantes les équations de propagation des champs électromagnétique *(la lumière)*.

A partir de cela nous chercherons l'expression d'un Lagrangien invariant par changement de repère et découvrirons une autre réalité, celle que la masse et l'énergie *« sont deux aspects complémentaires d'une même réalité »*…

Nous terminerons par un calcul simplifié invitant à penser que la gravitation influence l'écoulement du temps. Evoquerons la métrique de schwartzchild qui intègre le champ de gravitation et les trous noirs.

Ne nous trompons, pas, il s'agit ici d'un travail de vulgarisation et non un cours de physique théorique. De très bons ouvrages sont proposés en fin de document.

Principe des variations

Nous l'avons évoqué déjà par deux fois, les mathématiques constituent le ciment de la physique théorique. Nous proposons donc de commencer par un rapide rappel d'objets issus de cette riche discipline qui seront utiles par la suite. La mécanique s'intéresse à la trajectoire des systèmes. Une trajectoire est un chemin dans un espace donné *(droite, plan, espace, hyper espace …)*. La vitesse caractérise la variation de position dans le temps et l'accélération la variation de la vitesse dans le temps. La force, au sens classique, est un effet qui provoque un changement de vitesse.

Ces quelques remarques sont intéressantes. Notons r (vecteur d'un espace donné) la position, la vitesse par $\dot{r}$ *et supposons que* $\ddot{r} = f(r, \dot{r})$. *Ayant noté* $\ddot{r}$ *l'accélération. Alors la donnée de la position, de la vitesse et la fonction f (liée au contexte) permet de connaître la dynamique du système. L'expression* $\ddot{r} = f(r, \dot{r})$ *ressemble étrangement au principe fondamental de la dynamique non ?*

Bref nous le sentons bien, il va être souvent question d'études de variation. Ce sujet est traité depuis plusieurs siècles par les physiciens et les mathématiciens.

Tout comme *« un train peu en cacher un autre »*, une grandeur physique peut dépendre d'une autre. Cette dépendance se traduit mathématiquement par une application d'un ensemble vers un autre. Travaillant avec des nombres, l'objet mathématique souvent rencontré est une fonction d'une variable

$$x \in D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Une fois que l'on sait bien traiter le problème des variations d'une fonction d'une variable on peut tenter la généralisation à plusieurs variables. Aux véritables mathématiciens, nous précisons que ce document n'est pas rédigé avec la rigueur technique du domaine. C'est davantage dans l'esprit de *« l'utilisateur amateur »* que nous présentons les choses.

Du taux de variation à la dérivée

La première initiation au calcul de variations en milieu scolaire Français se faisait en classes de seconde, de mémoire, après avoir introduit la géométrie analytique et les équations de droites, fut introduit le calcul du taux de variation. Le calcul d'une variation de f autours de x_0 est défini de la manière suivante :

$$f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = \delta f(x_0)$$

Le rapport des accroissements, nommé taux de variation, au voisinage de x_0:

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta x} = \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

Nous définissons la fonction dérivée comme limite du taux de variation de la manière suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

Si x_0 est solution alors le signe du rapport d'accroissement est celui du signe δx.

On montre sans difficultés que cette limite est la pente de la droite tangente à la courbe au point (x0,f(x0)). La dérivée porte une information intéressante sur la nature de la variation de la fonction, par exemple lorsque celle-ci est positive la courbe est croissante *(x<y ➔ f(x)<f(y))* et lorsqu'elle est négative alors elle est décroissante *(x>y ➔ f(x)<f(y))*. Et lorsqu'elle est nulle ? …. Elle est constante.

Les polynômes jouent un rôle particulier, intéressons nous au calcul de la fonction dérivée *(peut être vu comme un opérateur linéaire appliquant l'espace des fonctions vers lui même)*, d'un monôme :

$$f: x \to x^n$$

Une variation de f autours de x d'amplitude h s'écrit :

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p h^p x^{n-p} - x^n$$
$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} h + \cdots + C_n^n h^n - x^n, C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Rappelons que nous notons : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ avec 0!=1!=1.

D'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + hT(x,h)$$

Le second terme tend vers zéro quand h tend vers zéro. Nous en déduisons que :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Considérons à présent deux fonctions f et g puis la fonction z :

$$z: x \to z(x) = f(x)g(x)$$

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = g(x+h)\big(f(x+h) - f(x)\big) + f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big)$$

)

Ainsi en passant à la limite on a :

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Considérons à présent la fonction composée :

$$y(x) = f(g(x))$$

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + hg'(x)) = f(g(x)) + hg'(x)f'(g(x))$$

Donc

$$(f \circ g) = g'(x)f'(g(x))$$

Nous utiliserons aussi la propriété suivante *(sans démonstration)*:

$$p \in \mathbb{Q}, (u^p)' = pu'u^{p-1}$$

Nous noterons f' la dérivée de f, f'' la dérivée de f' et ainsi de suite.

De la dérivée à l'intégrale de Riemann

Considérons une fonction g dont nous cherchons à calculer l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe représentative dans le plan.

Pour faire ce calcul on peut définir une suite de rectangles N de largeur fixe, l'aire s'approche ainsi par :

$$A(a,b,N) = \sum_{p=0}^{N-1} g(x_p)\delta x, \delta x = \frac{b-a}{N}, x_0 = a, x_p = x_0 + p\delta x, x_{N-1} + \delta x = b$$

Nous adoptons la notation :

$$A(a,b) = \int_a^b g(x)dx = \lim_{N\to\infty} A(a,b,N)$$

Au passage nous remarquons qu'au voisinage d'un point, l'élément de surface est :

$$A(x, x+dx) - dA(x,x) = dA(x) = g(x)dx$$

Ainsi A peut être considérée comme une fonction dont g est la dérivée.

De l'intégrale de Riemann à l'approximation polynomiale des fonctions au voisinage d'un point (Formule de Taylor-Lagrange)

Nous allons voir que Mr Lagrange a eu une contribution toute particulière en physique théorique. Pour le moment considérons la suite réelle:

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)dx$$

Notons que nous représentons le résultat de n dérivations successives d'une fonction par $f^{(n)}$.

Partant de la formule de dérivation *(ou règle d'intégration par partie – nous en ferons multiples usage dans la suite)*:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

On trouve :

$$R_k = [\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)]_a^b - \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx = -\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{k-1}$$

Cette formule, en sommant terme à terme permet d'écrire :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

Partant du théorème de la moyenne :

$$\exists c \in [a,b] \; tq \; f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

On peut montrer que :

$$\exists \alpha \in [a,b] tq \; R_k = f^{(k)}(\alpha) \frac{(b-\alpha)^{k+1}}{k+1!}$$

En effet considérons f et g deux fonctions continues entre a et b.

$$I(a,b) = \int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n, S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i g_i d_i \; , x_0 = a, x_i = x_{i-1} + d_i$$

On peut appliquer le théorème de la valeur moyenne sur une tranche du maillage :

$$f(\alpha_i) = \frac{1}{d_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \; , on \; pose \; f_i = f(\alpha_i)$$

Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i g_i d_i = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Posant :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = F(x_{i+1}) - F(x_i) = F_{i+1} - F_i$$

On trouve :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_i\,(F_{i+1} - F_i) = g_0F_1 - g_0F_0 + g_1F_2 - g_1F_1 + g_2F_3 - g_2F_2 + \cdots + g_{n-1}F_n - g_{n-1}F_{n-1}$$

Ainsi :

$$F_0 = F_n = 0 \Rightarrow S_n = F_1(g_0 - g_1) + \cdots + F_{n-1}(g_{n-2} - g_{n-1})$$

F étant continue entre a et b elle atteint une valeur minimale I et une valeur maximale S, d'autre part nous supposons g non croissante ainsi le signe de $(g_p - g_{p+1})$ est >=0 nous avons :

$$\sum{}'(g_{i-1} - g_i)F_i \geq I \sum{}'(g_{i-1} - g_i) = g_0 I$$

De même :

$$\sum (g_{i-1} - g_i)F_i \leq S \sum (g_{i-1} - g_i) = g_0 S$$

Posant :

$$F(\alpha_i) = I \text{ et } F(\alpha_s) = S$$

Et en passant à la limite :

$$g_0 F(\alpha_i) \leq I(a,b) \leq g_0 F(\alpha_s)$$

De par la continuité de F on peut trouver :

$$\alpha \in [a,b] tq\, I(a,b) = F(\alpha) \int_a^{\alpha} g(x)dx$$

Appliquons cette propriété à R_k il vient :

$$R_k = f^{(k)}(\alpha)\frac{(b-\alpha)^{k+1}}{k+1!}$$

Ainsi le reste est bien négligeable devant les termes d'ordre supérieur :

$$\left|\frac{R_{k+1}}{R_k}\right| \to 0, R_k \sim o((b-\alpha)^{k+1})$$

Recherche de points maximums et minimums

Nous considérons une fonction f et sur un domaine de son ensemble de définition nous cherchons les points qui annulent sa dérivée *(là où la fonction est ponctuellement constante)*.

La formule de Lagrange donne :

$$f(x+\delta x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\delta x^n + o(\delta x^{n+1})$$

Ce qui donne au deuxième ordre :

$$f(x+\delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + f''(x)\frac{\delta x^2}{2}$$

Dans ce cas :

$$f(x+\delta x) - f(x) = f''(x)\frac{\delta x^2}{2}$$

Supposons $f''(x) > 0$ alors $\delta f(x) > 0$ ce qui signifie que tout accroissement de f de x est positif et donc que f en x atteint un minimum.

Supposons $f''(x) < 0$ alors $\delta f(x) < 0$ ce qui signifie que tout accroissement de f de x est négatif et donc que f en x atteint un maximum.

Il est clair que l'intégrale et la dérivée sont deux opérateurs linéaires appliquant des espaces de fonctions vers d'autres.

Quelques exemples de recherche d'optimum

Nous allons donner quelques exemples simples de recherche d'optimums

Recherche du cylindre de plus grand volume contenu dans un cône

Illustrons cela à l'aide d'un exemple, dans un cône de base de rayon R et de hauteur H on cherche le cylindre de plus grand volume qu'on peut placer au dedans:

$$\pi x^2 y = v(x), \frac{x}{R} = \frac{H-y}{H}$$

Donc :

$$v(y) = \pi \frac{R^2}{H^2}(H^2 - 2Hy + y^2)y, v'(y) = \pi \frac{R^2}{H^2}(H^2 - 4Hy + 3y^2)$$

$$\Delta = 16H^2 - 12H^2 = 4H^2$$

$$y = \frac{4H \mp 2H}{6} = \frac{H}{3}$$

Ainsi le cylindre de plus grand volume contenu dans le cône de hauteur H et de rayon R a une hauteur du tiers de H.

Recherche du cylindre de plus grand volume contenu dans une sphère

Le principe est le même, la symétrie du problème suivant deux axes nous permet de considérer le problème réduit au quart de cercle.

Sur cette portion, le cercle de rayon 1 *(en excluant le point d'abscisse 1)* a une représentation analytique de la forme :

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

D'où le volume du cylindre :

$$V(x) = y(x)\pi x^2 = \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

On peut dériver :

$$V'(x) = \pi\left(2x\sqrt{1-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2x\pi}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2x\pi}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{2} - x^2\right)$$

On trouve :

$$x = \sqrt{2}$$

Ce nombre est remarquable, il ne peut être écrit, c'est un nombre irrationnel … mais ce n'est pas le propos aujourd'hui…

Recherche de l'angle de tir envoyant un projectile le plus loin dans un champ de pesanteur constant

Ici nous calculons l'équation de trajectoire d'un projectile lancé dans un champ de force vertical et constant *(assimilé au champ de pesanteur terrestre par exemple)* et on cherche l'angle de tir qui enverra le projectile le plus loin *(toute force de résistance négligée)*. Nous utilisons dans cet exercice classique le principe fondamental de la dynamique classique. La somme des forces *(ici la seule pesanteur, tout frottement étant négligé)* fait varier la vitesse.

Trajectoire :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + \tan(\alpha)\,x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \frac{g}{2}\frac{x}{v_{0x}{}^2} = \tan(\alpha) \end{cases}$$

Ou encore :

$$\frac{g}{2v_{ox}^2}x = \tan(\alpha) \Rightarrow x = \frac{2v^2 cos^2(\alpha)\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)} = \frac{2v^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha)$$

Ainsi le point de chute est :

$$x(\alpha) = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha)\,,\ atteint\ pour\ \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Extension aux fonctions de plusieurs variables

Pour les fonctions de plusieurs variables on procède de la même manière mais variable par variable, on introduit ainsi la notion de dérivée partielle :

$$x^1,\dots,x^n \to f(x^1,\dots,x^n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}f(x^1,\dots,x^n) = \lim_{\delta x^k \to 0}\frac{f(x^1,\dots,x^k+\delta x^k,\dots,x^n) - f(x^1,\dots,x^k,\dots,x^n)}{\delta x^k}$$

Ainsi un accroissement au premier ordre se calcul par :

$$\delta f(x^1,\dots,x^n) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x^k}f(x^1,\dots,x^n)\delta x^k$$

Pour alléger les notations nous noterons :

$$\delta f(x^1,\dots,x^n) = \sum_{i=1}^{i=n} \partial_k f(x^1,\dots,x^n)\,\delta x^k$$

Nous allons traiter à titre d'exemple la recherche de la droite dite de régression linéaire. Dans un cadre général, on dispose d'un ensemble de N mesures faites sur K paramètres *(des paramètres prélevés par exemple sur des échantillons de produits réalisés sur une chaîne de production micro électronique, mécanique, pharmaceutique ou autre)* . Ces mesures donnent un nuage de points dans un hyperespace donné de dimension K. Chaque point est donné par :

$$\{M(x_i, i = 1 \dots K)\}$$

Nous cherchons la fonction f qui passe au plus proche de tous ces points. On se place dans le cadre d'une géométrie Euclidienne ainsi l'écart quadratique moyen est donné par :

$$\widetilde{x_k} = f(x_1,\dots,x_{k-1})$$

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{M}\sqrt{\sum (x_{k,u} - \widetilde{x_{K,u}})^2}$$

Où nous avons accentué la valeur *« théorique »*, la valeur non accentuée est la mesure vraie.

On cherche alors la fonction f qui minimise le critère epsilon.

On peut faire dans la complexité en supposant f de forme polynômiale d'ordre P :

$$f(X) = \sum{}' a_p x_1^{i_1} \dots x_{k-1}^{i_{k-1}}$$

On injecte alors cette expression dans le critère epsilon et on dérive par rapport à chaque coefficient a.

Sur un plan pédagogique on peut faire mieux … simplifions en nous plaçant dans un plan, les variables sont notées (x,y) et la fonction recherchée est linéaire :

$$y = f(x) = ax + b$$

$$\varepsilon(a,b) = \frac{1}{M}\sqrt{\sum (y_k - ax_k - b)^2}$$

Reste alors à résoudre le système d'équations

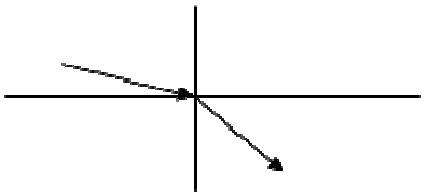
$$\partial_a \varepsilon = 0, \partial_b \varepsilon = 0$$

Autres exemples de recherche d'optimum

Nous donnons d'autres exemples de calcul de variations à la recherche d'optimum dans des situations physiques afin d'introduire le principe de moindre action *(à la base de la mécanique Lagrangienne)*.

Loi de l'optique géométrique

Si on regarde la loi de l'optique géométrique dite de la réfraction, cette loi énonce que lorsqu'un rayon de lumière arrive sur une surface séparant deux milieux d'indice n1 et n2 alors on a la relation suivante :



$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Cette loi issue de Descartes ne satisfaisait pas, dans sa démonstration, le mathématicien Français Fermat qui en chercha une autre plus rigoureuse *(selon son avis)*.

Il énonça un principe de la forme *« la lumière va d'un point à un autre suivant un chemin qui minimise le temps »*. Exprimons mathématiquement le temps mis pour aller d'un point A à B en passant par H *(point de rencontre de la lumière situé sur la frontière entre les deux milieux) (intuitivement nous disons que la ligne droite est le chemin qui relie deux point le plus court et donc la trajectoire qui minimise le temps – nous démontrerons cela un peu plus loin dans ce document)*.

$$(x_A)^2 + (y_A - y)^2 = (n_1 t_1)^2$$

$$(x_B)^2 + (y_B - y)^2 = (n_2 t_2)^2$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{(x_A)^2 + (y_A - y)^2}}{n_1} + \frac{\sqrt{(x_B)^2 + (y_B - y)^2}}{n_2}\right) = 0$$

Si on fait le calcul :

$$\frac{(y_A - y)}{n_1\sqrt{(x_A)^2 + (y_A - y)^2}} + \frac{(y_B - y)}{n_2\sqrt{(x_A)^2 + (y_A - y)^2}} = 0$$

Et donc le sinus étant le rapport entre le coté opposé à l'angle et l'hypoténuse on a bien :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

C'est quelque chose de remarquable, *« la lumière va d'un point à un autre suivant un chemin qui minimise le temps »*. Naturellement et sans contrainte les systèmes se meuvent sur des chemins qui minimisent le temps. Le calcul ci-dessus est tout à fait valable dans le contexte estival suivant. Un ballon dans un lac, pas de vent pas de courant, vous êtes sur la plage, nous savons maintenant à quel endroit pénétrer dans l'eau pour aller chercher le ballon plus vite…

Recherche de trajectoire de moindre temps

On se pose maintenant un autre problème, tout aussi classique que le premier. Dans le champ de pesanteur deux points A et B, A au dessus de B. Trouver le chemin liant A à B qui minimise le temps mis. En bref le toboggan le plus rapide. Ce n'est pas la ligne droite, ici il y'a la contrainte du champ de gravitation. Pour répondre à cela nous faisons appel à la physique et supposons qu'au long du chemin il n'y a pas de frottements *(en bref conservation de l'énergie mécanique)*.

Deux énergies se compensent, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Pour la seconde nous la prenons nulle en B. Nous avons alors assez aisément :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy = mgy_A$$

Soit encore

$$\frac{dx^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{dt^2} = 2g(y_A - y)$$

D'où :

$$dt = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g(y_A - y)}}dx$$

Le problème est particulier, il revient à chercher la fonction y dépendant de x telle que l'intégrale suivante soit minimale :

$$s(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g(y_A - y)}}\,dx$$

Nous allons développer dans la suite des éléments nous permettant de résoudre ce problème.

Etude sommaire des coniques

Les coniques ont été étudiées depuis *« l'antiquité »*, on peut les définir comme étant les courbes résultant de l'intersection d'un cône et d'un plan. La trajectoire des planètes sont de type conique.

Définition et caractérisation analytique des lieux géométriques

Nous considérons une droite (D) du plan P et un point F de P. Nous nommons H(M) le point M projeté orthogonalement sur D. Nous nommons axe focal la droite qui contient F et qui est orthogonale à D. nous notons K l'intersection de D et l'axe focal (D est appelé directrice). Nous nous donnons un nombre réel e strictement positif et nous cherchons l'ensemble des points donnés par :

$$M \in P \ tq \ \frac{MF}{MH} = e$$

Nous nommons sommet l'intersection de cet ensemble avec l'axe focal. C'est donc l'ensemble des points M dont le projeté sur la directrice est en K.

$$MF = eMK$$

Nous pouvons décrire vectoriellement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK} : cas\ où\ M\ est\ à\ gauche\ de\ F\ et\ K\ à\ droite\ de\ F \\ \overrightarrow{M'F} = -e\overrightarrow{M'K} : cas\ où\ M'\ est\ entre\ F\ et\ K \end{cases}$$

Considérons le cas où e<1 (M' est bien à gauche de K) et introduisons O comme milieu de MM'.

$$MF - eMK = MO + OF - eMK = 0, M'O + OF + eM'K = 0, on\ somme :$$

$$2OF + eM'K + eKM = 0 \Rightarrow 2OF = eMM' \Rightarrow OF = eOM', OK = \frac{1}{e}OM'$$

Nous allons chercher une représentation analytique du lieu des points. Pour cela nous définissons un repère du plan P où l'axe focal constitue les abscisses, et la directrice les ordonnées. O sera l'origine du repère.

$$a = OM', c = OF \Rightarrow c = ea$$

Ainsi :

$$OK = \frac{1}{e}OM' \Rightarrow OK = \frac{a}{e} = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$$

Donc :

$$M(x,y), F(c,0), K\left(\frac{a^2}{c},y\right) \Rightarrow y^2-(c-x)^2=e^2\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

A présent deux cas se présentent :

$$1 :\ a^2-c^2>0 \Rightarrow \exists b\ tq\ b^2=a^2-c^2 \Rightarrow M(x,y) tq\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$2 :\ a^2-c^2<0 \Rightarrow \exists b\ tq\ b^2=-(a^2-c^2) \Rightarrow M(x,y) tq\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Dans le premier cas la classe des représentations est une ellipse, dans le second cas une hyperbole.

Prenons le cas où a=b, nous reconnaissons le lieu d'un cercle de rayon a.

Prenons le cas où e=1.

Dans ce cas MF=MH, donc le sommet est caractérisé par MF=MK, nommons O le point concerné : OF=OK ainsi O est milieu du segment [F,K] ainsi la directrice a pour équation :

$$y=-\frac{c}{2} \Rightarrow M(x,y), F\left(-\frac{c}{2},0\right), H\left(\frac{c}{2},y\right), y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow y^2+x^2-cx+\frac{c^2}{4}-x^2-cx-\frac{c^2}{4} \Rightarrow y^2=2cx$$

Nous obtenons le lieu des points dont la classe est nommée parabole.

Principe de moindre action

L'idée suivante est à la base de la mécanique Lagrangienne. **Un système évolue sans contrainte sur une trajectoire qui minimise une certaine fonction de coût.** C'est-à-dire que si le système est décrit par un ensemble de variables, lorsque le système évolue ces variables dessinent une trajectoire dans un espace *(espace d'état, espace des phases ou plus simplement l'espace géométrique)* chaque point de cette trajectoire est repérable par un indice continu, une variable que nous nommons t *(par analogie avec le temps)*. Ainsi la trajectoire liant A à B est un ensemble de points :

$$\{M(x_i(t))\}, t \in [t(A), t(B)], M(t(A)) = A \text{ et } M(t(B)) = B$$

La fonction à minimiser, pour le moment nous n'en connaissons pas la nature physique, même si on en a une petite idée, est notée S et dite action du système. La *« variable »* ici est une fonction L nommée Lagrangien.

Le principe de moindre Action

L'objet à minimiser est construit de la manière suivante, une fonction de la position et de l'impulsion *(l'impulsion c'est quelque chose de proportionnel à la vitesse, dans le formalisme de la mécanique de*

Hamilton c'est un objet mathématique un peut plus complexe et en mécanique quantique c'est un opérateur linéaire – cf document précédent)

Notons x les variables de position et p celles de l'impulsion, en chaque point de la trajectoire, paramétré par une variable t*(le temps par exemple)*, on associe une mesure :

$$L(x(t), p(t), t)dt$$

On note aussi

$$L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

La trajectoire suivit sera celle qui minimise la somme de cette mesure en tout point de la trajectoire. Ceci défini ce qu'on appel l'action :

$$S(A,B) = \int_{t(A)}^{t(B)} L(x_i, \frac{d}{dt}x_i, t)dt$$

On cherche alors à minimiser cette quantité. Pour cela on utilise ce qui a été exprimé dans notre introduction au calcul des variations. Une fonction est à son minimum en un point quand sa variation s'annule en ce point. On imagine virtuellement la solution optimale, puis une autre infiniment proche, la variation est alors nulle.

Pour simplifier supposons que L ne dépende pas explicitement du temps, et réduisons le problème à une variable *(cela simplifie les notations et le résultat est assez simple à généraliser).*

Equations de Lagrange

Appliquant ce que nous venons de dire, pour résoudre le problème nous considérons l'intégrale pour x suivant une trajectoire donnée, et le problème à une dimension. Nous considérons une variation infinitésimale de cette trajectoire de sorte que :

$$x \to x + \delta x \text{ et } \dot{x} \to \dot{x} + \dot{\delta x} \text{ et } \delta x\big(t(A)\big) = \delta x\big(t(B)\big) = 0$$

$$L\big(x + \delta x, \dot{x} + \dot{\delta x}, t\big) = L(x, \dot{x}, t) + \partial_x L(x, \dot{x}, t)\delta x + \partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t)\dot{\delta x}$$

En intégrant par partie :

$$\int \partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t)\dot{\delta x} = \partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t)\delta x] - \int \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t))\delta x$$

Nous obtenons *(le premier terme à droite de l'égalité est nul car nous avons dit qu'aux extrémités du chemin la variation était nulle)*:

$$L(x+\delta x, x+\dot{\delta x}, t) - L(x, \dot{x}, t) = (\partial_x L(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t))\delta x$$

En intégrant :

$$\delta S = \int_{t(A)}^{t(B)} (L(x+\delta x, x+\dot{\delta x}, t) - L(x, \dot{x}, t))\, dt = \int_{t(A)}^{t(B)} (\partial_x L(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t))\, \delta x dt$$

Rappelons que l'extrémum est obtenu pour $\delta S = 0$.

Ainsi la variation δx étant arbitraire nous obtenons :

$$\partial_x L(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t) = 0$$

Il s'agit de l'équation dite de Lagrange.

Revenant au problème précédent, minimiser l'intégrale suivante

$$s(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g(y_A - y)}} dx$$

se réduit au Lagrangien :

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}}$$

La fonction y devient solution de :

$$\partial_y L(y, y', x) - \frac{d}{dx}(\partial_{y'} L(y, y', x) = 0$$

Cette mesure L doit bien avoir une réalité physique. Une fois exprimé, ce lagrangien permet de déterminer une équation différentielle dont les solutions sont les trajectoires possibles.

Liaison avec la mécanique des forces

Partons de l'équation de Lagrange :

$$\partial_x L(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(x,\dot{x},t)$$

Et rappelons le principe fondamental de la dynamique *(principe dont l'étude est programme des classes de terminales scientifiques Françaises)* :

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Le terme de gauche de l'équation peut être considéré comme une généralisation de la force et le terme de droite comme la dérivée d'une généralisation de l'impulsion *(appelée quantité de mouvement)*.

Notons p l'impulsion généralisée :

$$\frac{d}{dt}(p\dot{x} - L) = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(x,\dot{x},t)\dot{x} + \partial_{\dot{x}} L(x,\dot{x},t)\ddot{x} - \frac{d}{dt}L$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt}(p\dot{x} - L) = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(x,\dot{x},t)\dot{x} + \partial_{\dot{x}} L(x,\dot{x},t)\ddot{x} - \partial_x L\dot{x} - \partial_{\dot{x}} L\ddot{x} = \frac{d}{dt}L$$

Recherche d'invariants

La recherche d'invariants est fondamentale, ces derniers permettent l'établissement des équations d'évolution des systèmes en fonction de leur contexte. Sans invariants il serait difficile de le faire *« toute loi »* dépendrait intrinsèquement du contexte. Les invariants permettent de tisser des relations valable au dessus des différents contextes.

Conservation de l'énergie

Nous remarquons que si le Lagrangien de dépend pas explicitement du temps alors la quantité :

$$E = p\dot{x} - L$$

Est une constante du mouvement.

Conservation du moment cinétique

Il existe d'autres invariants. Considérons une rotation infinitésimale autours d'un axe porté par un vecteur unitaire u, nous notons par abus mais aussi pour alléger les notations $\delta\varphi \; le \; vecteur$.

$$r \to r + r \wedge \delta\varphi, \dot{r} \to \dot{r} + \dot{r} \wedge \delta\varphi$$

$$\delta L = L(r + r \wedge \delta\varphi, \dot{r} \to \dot{r} + \dot{r} \wedge \delta\varphi) - L(r, \dot{r}) = (\partial_r L \wedge r + \partial_{\dot{r}} L \wedge \dot{r})\delta\varphi$$

Si il y'a invariance par rotation :

$$\delta L = 0$$

D'où :

$$\partial_r L \wedge r = -\partial_{\dot{r}} L \wedge \dot{r}$$

Formons la grandeur :

$$\sigma = r \wedge \partial_{\dot{r}} L$$

$$\frac{d}{dt}\sigma = \dot{r} \wedge \partial_{\dot{r}} L + r \wedge \frac{d}{dt}\partial_{\dot{r}} L = -r \wedge \partial_r L + r \wedge \frac{d}{dt}\partial_{\dot{r}} L = -r \wedge \partial_r L + r \wedge \partial_r L = 0$$

Dans un espace géométrique euclidien le mouvement est donc plan dont le moment cinétique est vecteur orthogonal.

Une première expression du Lagrangien

Lorsque l'évolution du système n'est pas sensible à l'orientation de l'espace *(c'est-à-dire si on tourne l'espace sur lui-même sur « chacun de ses axes »)* et si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors nous avons une seconde constante du mouvement.

D'un point de vue physique, E désigne l'énergie du système et nous avons la propriété de conservation de l'énergie *(utilisée dans notre exemple de recherche de trajectoire en temps minimal d'un point à un autre dans le champ de pesanteur)*. Sigma désigne le moment cinétique et exprime sa conservation au cours du mouvement.

A présent nous allons chercher une expression du Lagrangien. Pour cela L est supposé non explicitement dépendant du temps, l'espace homogène et isotrope. C'est-à-dire que l'expérience menée ne dépend ni du moment où on la commence, ni de l'endroit où on la mène et que l'espace n'a aucune direction privilégiée.

Si L de dépend pas du lieu alors on peut dire que :

$$\partial_x L = 0$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L = K$$

Si en plus aucune direction n'est privilégiée L ne dépend que du module de la vitesse. Ainsi :

$$L(v) = Kv^2 = \frac{m}{2}v^2$$

Nous avons posé m/2 de sorte que l'impulsion dérive de l'énergie. Nous reconnaissons ici l'expression de l'énergie cinétique *(l'étude de l'énergie cinétique est au programme des classes de 1ière scientifiques Françaises)*. Ce résultat est donc particulièrement intéressant.

Mécanique Lagrangienne – exemples

Nous allons illustrer ici deux exemples, le premier a probablement considérablement influencé les penseurs des 18 et 19 ième siècles. Nous allons utiliser le principe de moindre action et en déterminer à l'aide du potentiel de Newton l'équation de mouvement des planètes.

Le second, très cher à certains musiciens, est l'équation de mouvement des cordes vibrantes. Nous introduirons au passage la notion de densité de Lagrangien car le paramètre d'évolution dans ce cadre est une fonction *(l'amplitude du mouvement de la corde)*. Cet exemple est important car dans la nature les vibrations jouent un rôle important. Une vibration n'est pas un point matériel mais sur un plan mécanique la propagation d'une déformation.

Equations de mouvement dans un champ de force central

Nous considérons une particule de masse m en mouvement dans un champ de force central. Nous avons vue que le moment cinétique était conservé, ceci signifie aussi que le mouvement s'effectue dans un plan. Nous adoptons pour simplifier les calculs les coordonnées polaires :

Commençons par quelque chose d'un peu technique en rappelant la relation entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésienne :

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$

D'où

$$\begin{cases} e_r = \cos(\theta)\, e_x + \sin(\theta)\, e_y \\ e_\theta = -\sin(\theta)\, e_x + \cos(\theta)\, e_y \end{cases}$$

On dérive :

$$\begin{cases} \dot{e_r} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\, e_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\, e_y = \dot{\theta} e_\theta \\ \dot{e_\theta} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\, e_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\, e_y = -\dot{\theta} e_r \end{cases}$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - m\varphi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - m\varphi$$

Les équations de Lagrange sont :

$$\begin{cases} \partial_r L = \dfrac{d}{dt}\partial_{\dot{r}} L \Leftrightarrow -m\partial_r \varphi + mr\dot{\theta}^2 = m\ddot{r} \\ \partial_\theta L = \dfrac{d}{dt}\partial_{\dot{\theta}} L \Leftrightarrow 0 = \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = K \end{cases}$$

Posons :

$$M = mr^2\dot{\theta}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{mr^2} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{mr^2}dt$$

Nous pouvons calculer l'énergie et on pose $U = m\varphi$:

$$E = \partial_{\dot{r}} L\dot{r} + \partial_{\dot{\theta}} L\dot{\theta} - L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U \Rightarrow E - U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} \Rightarrow 2(E-U) - \frac{M^2}{mr^2} = m\dot{r}^2$$

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{m}\left(2(E-U) - \frac{M^2}{mr^2}\right) \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\left(2(E-U) - \frac{M^2}{mr^2}\right)}}dr$$

Ainsi

$$d\theta = \frac{M}{mr^2}dt \Rightarrow d\theta = \frac{M}{mr^2}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\left(2(E-U) - \frac{M^2}{mr^2}\right)}}dr = \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{\left(2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}\right)}}dr$$

En intégrant nous obtenons l'équation de trajectoire :

$$\theta = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\big(E - U(r)\big) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Nous prenons le cas d'un champ de force central de la forme :

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Nous allons intégrer dans ce cadre :

$$d\theta = f(r)dr = \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}dr$$

Posons $u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -u^2 dr$:

$$d\theta = g(u)du = -\frac{M}{\sqrt{2m(E + \alpha u) - M^2u^2}}du$$

D'où nous obtenons :

$$\theta(u) - \theta_0 = \int_{u_0}^{u} -\frac{M}{\sqrt{2m(E + \alpha u) - M^2u^2}}du$$

Encore :

$$\theta(u) - \theta_0 = \int_{u_0}^{u} -\frac{M}{\sqrt{-M^2u^2 + 2m\alpha u + 2mE}}du$$

L'intégration donne :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\right) + Cte$$

$$choix\ de\ \theta\ tel\ que\ Cte = 0$$

C'est une conique dont les paramètres sont indiqués ci-dessous et liés à la configuration physique du problème.

$$\begin{cases} p = \frac{M^2}{m\alpha} \\ e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \\ \frac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta) \end{cases}$$

e<0 ➔Ellipse

$$\begin{cases} a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \\ r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \end{cases}$$

Champ de Lagrangien, équation de mouvement des cordes vibrantes – approche Lagrangienne

Ci-avant nous avons étudié le comportement d'un point matériel, nous avons vu que sa localisation est déterminée à la donnée d'un ensemble fini de paramètres. Lorsqu'on étudie la propagation d'une déformation, c'est en fait la déformation du milieu qu'on étudie. La propagation de cette déformation est liée entre autre à l'élasticité du milieu et aux différents frottements qui s'y opposent. *« Nous étudions le comportement d'un milieu continu »*. Conceptuellement, l'étude de la lumière en tant qu'onde physique a posé pas mal de problèmes aux physiciens, dans quel milieu elle se propage, l'espace *« intersidéral »* est t'il constitué d'une matière *(appelé l'éther)* dans lequel se propage la lumière à l'image du son dans l'air ou l'eau. Il n'ya pas d'éther, les équations de Maxwell relient électricité et magnétisme, leur inter relation, quand un varie dans l'espace cela provoque la variation de l'autre dans le temps et réciproquement ce qui induit un comportement ondulatoire… la lumière.

A présent nous n'étudions plus un point mais recherchons une fonction décrivant une propagation dans un milieu. Le Lagrangien local se détermine alors par unité de longueur ou de surface ou plus généralement unité de volume. Le Lagrangien obtenu sera une densité de Lagrangien. L'ensemble de ses paramètres en sera une amplitude *(celle de la déformation)* et ses différentes dérivées *(son gradient et sa dérivée par rapport au temps)*. Nous l'illustrons ci-dessous dans un cas simple.

A titre d'exemple simple nous considérons une corde homogène de densité linéaire de masse lambda constante. Nous nous plaçons en un point de cette corde d'abscisse x, l'énergie cinétique est :

$$dE_c(x) = \frac{\lambda dl}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

L'énergie potentielle est approchée par :

$$dE_p = \tau(dl - dx)$$

On peut alors considérer une densité de Lagrangien

$$dL = dE_c - dE_p$$

Ce qui donne :

$$dL = \frac{\lambda dx}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Appliquant la formule de Taylor Lagrange :

$$\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$$

D'où au premier ordre :

$$ldx = dL = \frac{\lambda}{2}\dot{y}^2(1+y'^2)dx - \tau\left(\frac{y'^2}{2}\right)dx$$

Ainsi :

$$L = \int ldx$$

Nous remarquons ici une particularité, la densité de Lagrangien s'exprime d'une autre manière. Si y est l'amplitude de vibration alors :

$$l = f(y, \partial_t y, \partial_x y)$$

Nous sommes confrontés à un nouveau problème de calcul de variations. Cherchons dans ce contexte la forme de l'équation de Lagrange.

$$\delta l = \partial_y l\delta y + \partial_{\partial_t y} l\delta\partial_t y + \partial_{\partial_x y} l\delta\partial_x y = \partial_y l\delta y + \partial_{\partial_t y} l\partial_t\delta y + \partial_{\partial_x y} l\partial_x\delta y$$

On voit bien ici que deux intégrations par parties sont possibles.

$$\int \partial_{\partial_t y} l\partial_t\delta y = [\partial_{\partial_t y} l\delta y] - \int \frac{d}{dt}(\partial_{\partial_t y} l)\delta y$$

$$\int \partial_{\partial_x y} l\partial_x\delta y = [\partial_{\partial_x y} l\delta y] - \int \frac{d}{dx}(\partial_{\partial_x y} l)\delta y$$

Les termes entre crochets sont nuls par hypothèse sur la variation *(nulle aux extrémités)* ce qui donne :

$$\int \delta l = \int (\partial_y l - \frac{\partial}{\partial t}(\partial_{\partial_t y} l) - \frac{\partial}{\partial x}(\partial_{\partial_x y} l))\delta y_{=0}$$

D'où l'équation de Lagrange :

$$\partial_y l = \frac{\partial}{\partial t}(\partial_{\partial_t y} l) + \frac{\partial}{\partial x}(\partial_{\partial_x y} l)$$

Reprenons ce calcul et généralisons davantage en ramenant l'évolution du système à l'étude d'une fonction :

$$y(x_1, \ldots, x_n, t)$$

Le Lagrangien dans cette généralisation s'exprime avec les variables :

$$L(y, \partial_{x_1} y, \ldots, \partial_n y, \partial_t y)$$

Un calcul analogue donne

$$\partial_y l = \frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_{\partial_t y} l\right) + \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\partial_{\partial_{x_i} y} l\right)$$

Si on ne réserve pas une place privilégiée au temps *(ce qui est le cas en mécanique relativiste – nous en toucherons quelques mots un peu plus tard)*

$$\partial_y l = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\partial_{\partial_{x_i} y} l\right)$$

Où l'un des xi représente le temps.

Revenons à notre densité de lagrangien

$$l = \frac{\lambda}{2}\dot{y}^2(1 + y'^2) - \tau\left(\frac{y'^2}{2}\right) \sim \frac{\lambda}{2}\dot{y}^2 - \tau\left(\frac{y'^2}{2}\right)$$

Elle ne dépend explicitement ni du temps ni de la position ni de l'amplitude, alors l'équation de Lagrange se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_{\partial_t y} l\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\partial_{\partial_x y} l\right)_{=0}$$

Explicitant à partir de l'expression de l :

$\partial_{\partial_t y} l = \partial_{\dot{y}} l = \lambda \dot{y}$

$\partial_{\partial_x y} l = \partial_{y'} l = -\tau y'$

D'où :

$$\lambda \ddot{y} - \tau y'' = 0$$

Nous reconnaissons ici l'équation de propagation de l'onde exposée dans notre premier document relatif à la construction des gammes.

$$c = \frac{\tau}{\lambda}, \partial_t^2 y - c^2 \partial_x^2 y = 0$$

Nous voyons ici à nouveau l'aspect remarquable d'une part de la simplicité de l'expression *« le système se meut librement en minimisant une certaine fonction de coût »* cette fonction de coût est homogène à une énergie et elle permet de donner l'expression mathématique de l'évolution d'un point matériel *(d'un ensemble de points matériels)* mais aussi de système plus complexe comme des cordes membranes et plus généralement champs scalaires.

Géométrie - espace et physique

La géométrie est l'étude des formes de leurs propriétés etc. C'est une des activités par lesquelles les sciences ont grandies. Nous remarquons que nous avons donné une forme particulière à l'expression des éléments de longueur. En effet l'expression de l'allongement pour l'expression de l'énergie potentielle due à l'élasticité de la corde, nous avons noté :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

parce que nous considérons un problème à deux dimensions, à n dimensions nous aurions :

$$dl^2 = \sum' dx_i^2$$

C'est une forme toute particulière de la mesure d'une distance qui suppose un espace plat par exemple *(théorème de Pythagore)*.

Supposons que nous ayons à mesurer un élément de longueur à la surface d'une sphère de rayon 1 *(surface dans un espace de dimension 3)*.

Dans ce cadre : en coordonnées sphériques :

$$dl^2 = cos^2\varphi d\theta^2 + d\varphi^2$$

Nous voyons ici que dl dépend de la position. Nous reconnaissons ici une forme quadratique et sommes tentés de généraliser.

Dans un espace de dimension n l'élément de longueur se détermine par :

$$dl^2(x_i) = g_{ij}(x_i)dx_i dx_j$$

Revenant à notre problème de caractérisation du mouvement d'une déformation imposée à une corde, nous remarquons qu'il porte en lui *(même s'ils sont discrets)* des éléments relatifs aux propriétés géométriques du milieu. Le terme g est symétrique en ses deux indices.

Nous pourrions écrire dans une plus grande généralité :

$$dE_c(x_i) = \frac{\lambda\sqrt{g_{ij}dx_i dx_j}}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$dE_p = \tau\left(\sqrt{g_{ij}dx_i dx_j} - dx\right)$$

Etude des géodésiques – trajectoire de plus courtes distances entre deux points

Nous allons nous intéresser à présent à un nouveau problème de recherche d'optimum. Nous cherchons dans un espace donné à caractériser le chemin d'un point A vers un point B de plus courte longueur.

Nous rappelons que l'élément de longueur paramétrée est :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \rightarrow ds = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\,d\lambda$$

On est ainsi invité à minimiser la quantité :

$$S = \int_0^1 ds(\lambda)d\lambda$$

Alors parmi tous les chemins qui mènent de A vers B nous cherchons celui qui est le plus court. Pour cela on suppose qu'il a été trouvé en x^i. On considère alors un chemin arbitraire et très proche de ce dernier. La différentielle de l'action résultant doit s'annuler.

$$x^i \rightarrow x^i + \delta x^i, \dot{x^i} \rightarrow \dot{x^i} + \delta\dot{x^i}$$

Pour faire le calcul nous rappelons que : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et nous posons : $F = \sqrt{g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j}}$ *(où la ponctuation simple indique la dérivée par rapport au paramètre lambda)*.

Alors le calcul de la variation de S entre la trajectoire recherchée et la trajectoire perturbée est :

$$\delta\int\sqrt{g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j}}d\lambda = \int\frac{1}{2F}\delta(g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j})d\lambda$$

$$\delta(g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j}) = \delta g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j} + g_{ij}\delta(\dot{x^i}\dot{x^j}) = \delta g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j} + g_{ij}2(\dot{x^i}\delta\dot{x^j})$$

En effet remarquons que :

$$\delta\dot{x^j} = \delta\frac{d}{d\lambda}x^j = \frac{d}{d\lambda}\delta x^j$$

Ainsi :

$$\delta\int\sqrt{g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j}}d\lambda = \int\frac{1}{2F}\partial_k g_{ij}\dot{x^i}\dot{x^j}\delta x^k d\lambda + \frac{2g_{ij}}{2F}\dot{x^i}\frac{d}{d\lambda}\delta x^j d\lambda$$

On intègre le second terme par partie :

$$\int \frac{1}{F} g_{ij}\dot{x}^i \frac{d}{d\lambda}\delta x^j \, d\lambda = \int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F} g_{ij}\dot{x}^i \delta x^j\right) d\lambda - \int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F} g_{ij}\dot{x}^i\right)\delta x^j \, d\lambda$$

Or la variation étant nulle en A et en B ($\delta(A) = \delta(B) = 0$) :

$$\int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F} g_{ij}\dot{x}^i \delta x^j\right) d\lambda = 0$$

Poursuivons avec l'autre terme :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F} g_{ij}\dot{x}^i\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F}\right) g_{ij}\dot{x}^i + \frac{1}{F}\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ij}\dot{x}^i\right)$$

Et

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ij}\dot{x}^i\right) = \partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^k + g_{ij}\ddot{x}^i$$

Ce qui donne :

$$\delta S = \int \frac{1}{2F}\partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \delta x^k d\lambda - \int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F}\right) g_{ij}\dot{x}^i \delta x^j \, d\lambda - \int \frac{g_{ij}}{F}\ddot{x}^i \delta x^j \, d\lambda - \int \frac{1}{F}\partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^k \delta x^j \, d\lambda$$

Le paramètre lambda étant arbitraire, on peut toujours considérer comme paramètre la longueur s elle-même, l'expression se simplifie alors de manière significative :

$$\int \frac{1}{2F}\partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \delta x^k d\lambda - \int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F}\right) g_{ij}\dot{x}^i \delta x^j \, d\lambda - \int \frac{g_{ij}}{F}\ddot{x}^i \delta x^j \, d\lambda - \int \frac{1}{F}\partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^k \delta x^j \, d\lambda$$
$$= \int \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \delta x^k ds - \int g_{ij}\ddot{x}^i \delta x^j \, ds - \int \partial_k g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^k \delta x^j \, s\lambda$$

D'où l'équation différentielle caractérisant les chemins de plus courte longueur dans un espace muni d'une métrique donnée par le tenseur g:

$$\partial_p g_{i,j}\frac{\partial}{\partial s}x^i \frac{\partial}{\partial s}x^j - 2\partial_u g_{p,j}\frac{\partial x^u}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^j - 2g_{p,j}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^j\right) = 0$$

Pour illustrer cela nous allons déterminer l'équation des géodésiques d'un espace Euclidien puis de la surface d'une sphère plongée dans un *« espace naturel »* de dimension 3.

Géométrie Euclidienne

Considérons la métrique suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Cette métrique correspond à un espace Euclidien.

$$g_{ij} = \delta_{ij} \rightarrow \partial_p g_{ij} = 0 \rightarrow \delta_{p,j} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s} x^j\right) = 0 \rightarrow \ddot{x^p} = 0$$

D'où :

$$x^p = a^p s + b^p$$

Ainsi dans le plan :

$$x = As + B, y = Cs + D \rightarrow s = \frac{x - B}{A} \rightarrow y = \frac{C}{A}x - \frac{CB}{A} + D$$

$$y = ax + b$$

Le chemin le plus court est une droite.

La droite est totalement déterminée par les conditions aux limites :

$$x(A), y(A) \rightarrow y(A) = ax(A) + b, y(B) = ax(B) + b \rightarrow \frac{y(A) - b}{x(A)} = a \rightarrow y(B) = \frac{y(A) - b}{x(A)}x(B) + b$$

Géométrie sur une sphère de rayon unité

Poursuivons avec une sphère, nous avons introduit la métrique associée à la surface d'une sphère de rayon unité :

$$dl^2 = cos^2\varphi d\theta^2 + d\varphi^2$$

Les coordonnées sont ici (φ, θ) et la métrique est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

Le calcul des dérivées partielles des coefficients de la matrice sont :

$$\partial_1 g_{11} = 0, \partial_2 g_{11} = 0$$

$$\partial_1 g_{12} = 0, \partial_2 g_{12} = 0$$

$$\partial_1 g_{21} = 0, \partial_2 g_{21} = 0$$

$$\partial_1 g_{22} = -2cos\varphi sin\varphi, \partial_2 g_{21} = 0$$

Alors l'équation

$$\partial_p g_{i,j} \frac{\partial}{\partial s} x^i \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2\partial_u g_{p,j} \frac{\partial x^u}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2g_{p,j} \frac{d}{ds} (\frac{\partial}{\partial s} x^j) = 0$$

Se traduit dans ce contexte par :

$$-2\partial_u g_{p,j}\frac{\partial x^u}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^j = -2(\partial_1 g_{p,j}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^j + \partial_2 g_{p,j}\frac{\partial x^2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^j)$$
$$= -2(\partial_1 g_{p,1}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^1 + \partial_1 g_{p,2}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^2 + \partial_2 g_{p,1}\frac{\partial x^2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^1 + \partial_2 g_{p,2}\frac{\partial x^2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^2)$$
$$= -2\partial_1 g_{p,2}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^2$$

$$\partial_p g_{i,j}\frac{\partial}{\partial s}x^i\frac{\partial}{\partial s}x^j$$
$$= \partial_p g_{1,1}\frac{\partial}{\partial s}x^1\frac{\partial}{\partial s}x^1 + \partial_p g_{1,2}\frac{\partial}{\partial s}x^1\frac{\partial}{\partial s}x^2 + \partial_p g_{2,1}\frac{\partial}{\partial s}x^2\frac{\partial}{\partial s}x^1 + \partial_p g_{2,2}\frac{\partial}{\partial s}x^2\frac{\partial}{\partial s}x^2$$
$$= \partial_p g_{2,2}\frac{\partial}{\partial s}x^2\frac{\partial}{\partial s}x^2$$

$$-2g_{p,j}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^j\right) = -2(g_{p,1}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^1\right) + g_{p,2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^2\right))$$

D'où :

$$-2\partial_1 g_{p,2}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^2 + \partial_p g_{2,2}\frac{\partial}{\partial s}x^2\frac{\partial}{\partial s}x^2 - 2\left(g_{p,1}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^1\right) + g_{p,2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^2\right)\right) = 0$$

Pour p=1 : paramètre φ :

$$\partial_1 g_{2,2}\frac{\partial}{\partial s}x^2\frac{\partial}{\partial s}x^2 - 2g_{1,1}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^1\right) = 0$$

Pour p=2 : paramètre θ :

$$-2\partial_1 g_{2,2}\frac{\partial x^1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}x^2 - 2g_{p,2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^2\right) = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} sin\varphi cos\varphi\dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi} = 0 \\ 2tan\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} = cos\varphi\ddot{\theta} \end{cases}$$

Refaites le calcul, il y'a une erreur… ;-)

Géométrie sur la surface engendrée par un cône

Nous considérons un cône de sommet la base d'un repère orthonormé.

Le système de coordonnées cylindrique est utilisé.

Caractérisons un élément de longueur à la surface de ce cône.

$$dl = rd\theta e_\theta + dze_z + dre_r$$

La géométrie du cône lie les variables r et z de la manière suivante :

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} \Rightarrow z = \frac{Z}{R}r \Rightarrow dz = \alpha dr$$

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + (1 + \alpha^2) dr^2$$

D’où le tenseur métrique :

$$G = \begin{matrix} 1+\alpha^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{matrix}$$

On calcul alors les différents éléments :

$$\begin{cases} \partial_r g_{1,1} = \partial_r g_{1,2} = \partial_r g_{2,1} = 0, \partial_r g_{2,2} = 2r \\ \partial_\theta g_{i,j} = 0 \end{cases}$$

Ainsi l’équation des géodésiques :

$$\partial_p g_{i,j} \frac{\partial}{\partial s} x^i \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2\partial_u g_{p,j} \frac{\partial x^u}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2 g_{p,j} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial s} x^j\right) = 0$$

Devient :

$$\begin{cases} r^2 \partial_s \partial_s \theta = 0 \\ r(\partial_s \theta)^2 + (1+\alpha^2) \partial_s \partial_s r = 0 \end{cases}$$

L’équation des géodésiques est :

$$\begin{cases} r^2 \theta'' = 0 \\ r\theta'^2 + \beta r'' = 0 \end{cases}, \beta = 1 + \alpha^2$$

Equation de mouvement, liaison avec les géodésiques

Revenons à l’expression du Lagrangien :

$$L = \frac{m}{2} v^2$$

Nous pouvons introduire la géométrie dans ce Lagrangien :

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Rappelons que :

$$ds = \sqrt{g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt}} dt$$

D’où :

$$L = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x_i} \dot{x_j}$$

Rappelons les équations de Lagrange :

$$\partial_{x^p} L = \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x^p}} L$$

$$\partial_{x^p} L = \frac{m}{2} \dot{x_i} \dot{x_j} \partial_p g_{ij}$$

$$\partial_{\dot{x^p}} L = \frac{m}{2} (g_{ip} \dot{x^i} + g_{pi} \dot{x^i}) = m g_{pi} \dot{x^i} \Longrightarrow \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x^p}} L = \frac{d}{dt} g_{pi} \dot{x^i} + g_{pi} \ddot{x^i}$$

$$\frac{d}{dt} g_{pi} = \partial_k g_{pi} \dot{x^k}$$

$$\frac{m}{2} \dot{x_i} \dot{x_j} \partial_p g_{ij} = m \partial_k g_{pi} \dot{x^k} + m g_{pi} \ddot{x^i} \Leftrightarrow \dot{x_i} \dot{x_j} \partial_p g_{ij} - 2 \partial_k g_{pi} \dot{x^k} \dot{x^i} - 2 g_{pi} \ddot{x^i} = 0$$

Rappelons l'équation des géodésiques :

$$\partial_p g_{ij} \frac{\partial}{\partial s} x^i \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2 \partial_u g_{pj} \frac{\partial x^u}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} x^j - 2 g_{pj} \frac{d}{ds} (\frac{\partial}{\partial s} x^j) = 0$$

C'est la même équation, nous en déduisons que le mouvement libre des particules se fait suivant les géodésiques, c'est-à-dire les chemins les plus courts.

Relation entre métrique et gravitation ?

Nous avons montré par un calcul basé sur le principe de moindre action appliqué à un Lagrangien augmenté d'un terme variant inversement proportionnellement avec la distance que le déplacement se faisait dans un plan *(conservation du moment cinétique)* et suivant une trajectoire de la classe des coniques. Dans notre premier chapitre nous avons consacré quelques lignes aux coniques et évoqué que cette classe de courbe se situait à l'intersection entre cône et plan. Partant de cette idée nous pourrions déterminer la géométrie à la surface d'un cône et tenter d'intégrer les éléments relatifs au potentiel central *(dont le gradient détermine la force)* à l'intérieur de la métrique. Dans ce cadre obtenir une relation entre la géométrie *(tenseur métrique)* et l'énergie du système en conservant un Lagrangien simple *(~énergie cinétique)*.

Pour simplifier les choses, le fait que le résultat soit une conique influence notre étude :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2$$

Sur un cône le terme téta est constant, ainsi :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2$$

L'équation générale des géodésiques est :

$$\partial_p g_{a,b} \dot{x^a} \dot{x^b} - 2\frac{d}{ds}\left(g_{p,u}\dot{x^u}\right) = 0$$

Tous les termes non diagonaux sont nuls ce qui donne :

$$\partial_r g_{\varphi,\varphi} \dot{\varphi^2} - 2\frac{d}{ds}(g_{r,r}\dot{r^2} + \ldots)$$

Nous pourrions imaginer que le champ de force central est une propriété liée à la métrique, en bref que ce champ de force est une propriété géométrique de l'espace. L'équation de trajectoire nous l'avons vu est une conique. Nous l'avons vu aussi, une conique est l'intersection d'un plan est un cône. Nous pourrions penser qu'une conique est géodésique d'une surface conique et établir une relation entre le tenseur métrique et l'énergie en disant que le mouvement

Nous pourrions nous poser la question suivante. Considérant par exemple le Lagrangien d'une particule libre exprimée en coordonnées sphériques :

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r^2} + r^2\dot{\theta^2} + r^2\sin(\theta)^2\,\dot{\varphi^2}\right) + f(r,\theta,z_0)$$

On obtient une équation de la forme :

$$\begin{cases} \dot{r^2} = r\dot{\theta^2} + r\sin(\theta)^2\dot{\varphi^2} + h(r,\theta,z_0) \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r^2\dot{\varphi^2}\sin(\theta)\cos(\theta) + g(r,\theta,z_0) \\ r^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} = contante \end{cases}$$

En écrivant l'équation des géodésiques on trouve :

$$\begin{gathered} \dot{r^2} = r\sin(\theta)^2\dot{\varphi^2} \\ 0 = r^2\dot{\varphi^2}\sin(\theta)\cos(\theta) \\ r^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} = contante \end{gathered}$$

Ceci en restant sur un cône, défini par un angle téta constant.

L'idée était intéressante, toutefois dans l'état des raisonnements il n'est pas possible d'intégrer les éléments de potentiel dans la métrique. Nous en toucherons quelques mots en fin de document sans toutefois évoquer la théorie de la relativité générale.

Electromagnétisme

Les lois des phénomènes électriques et magnétiques peuvent t'ils provenir, dans leur structure mathématique, d'un problème d'optimisation de l'ordre de celui du principe de moindre action ?

Théorème de l'induction magnétique

Pour y répondre nous nous intéressons à un Lagrangien de la forme :

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + q\dot{r}.A - q\varphi$$

Où A désigne un potentiel vecteur, dépendant de la direction, et l'autre, phi, un potentiel scalaire de forme initiale similaire à celui rencontré pour la gravitation. Nous allons écrire les équations de Lagrange associées et exprimer le champ électrique et Magnétique en fonction de ces éléments.

Ce qui donne en coordonnées cartésiennes dans une géométrie euclidienne:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\left(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right) - q\varphi$$

Si on place ce Lagrangien dans les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} q(\dot{x}\partial_x A_x + (\dot{y}\partial_x A_y) + (\dot{z}\partial_x A_z) - \partial_x \varphi) = \dfrac{d}{dt}(m\dot{x} + qA_x) = m\ddot{x} + q\dot{A}_x \\ q(\dot{x}\partial_y A_x + (\dot{y}\partial_y A_y) + (\dot{z}\partial_y A_z) - \partial_y \varphi) = \dfrac{d}{dt}(m\dot{y} + qA_y) = m\ddot{y} + q\dot{A}_y \\ q(\dot{x}\partial_z A_x + (\dot{y}\partial_z A_y) + (\dot{z}\partial_z A_z) - \partial_z \varphi) = \dfrac{d}{dt}(m\dot{z} + qA_z) = m\ddot{z} + q\dot{A}_z \end{cases}$$

Or :

$$\dot{A}_p = \partial_t A_p + \partial_x A_p \dot{x} + \partial_y A_p \dot{y} + \partial_z A_p \dot{z}$$

En reportant dans le système d'équations :

$$q\dot{y}(\partial_x A_y - \partial_y A_x) + q\dot{z}(\partial_x A_z - \partial_z A_x) - q\partial_x \varphi = m\ddot{x} + q\partial_t A_x$$

$$q\dot{x}(\partial_y A_x - \partial_x A_y) + q\dot{z}(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - q\partial_x \varphi = m\ddot{y} + q\partial_t A_y$$

$$q\dot{x}(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + q\dot{y}(\partial_z A_y - \partial_y A_z) - q\partial_x \varphi = m\ddot{z} + q\partial_t A_z$$

Puis en considérant l'opérateur linéaire suivant :

$$B = rot(A) = \nabla \wedge A = \begin{cases} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{cases} \wedge \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} = \begin{cases} \partial_y A_z - \partial_z A_y & B_x \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z = B_y \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x & B_z \end{cases}$$

On trouve :

$$q\dot{y}B_z - q\dot{z}B_y - q\partial_x\varphi = m\ddot{x} + q\partial_t A_x$$

$$-q\dot{x}B_z + q\dot{z}B_x - q\partial_y\varphi = m\ddot{y} + q\partial_t A_y$$

$$q\dot{x}B_y - q\dot{y}B_x - q\partial_y\varphi = m\ddot{z} + q\partial_t A_z$$

Ce qui s'écrit aussi vectoriellement :

$$q.v \wedge B - qGrad(\varphi) - q\partial_t A = m\ddot{r}$$

On peut aussi définir B et E comme :

$$B = Rot(A)$$

$$E = -grad(\varphi) - \partial_t A$$

Nous obtenons :

$$f = q(\dot{r} \wedge B + E)$$

Nous retrouvons ici la force de Lorentz. Nous allons rapidement tomber sur la loi de l'induction Magnétique. En effet partons de

$$E = -grad(\varphi) - \partial_t A$$

$$RotE = -Rot\big(Grad(\varphi)\big) - \partial_t B = -\partial_t B$$

Nous pouvons intégrer des relations en calculant le flux de B au travers une surface limitée par un contour L. Alors :

$$\iint_{M\in S(L)} Rot(E)ds(M) = \oint E.dl = -\frac{d}{dt}\phi(B)$$

Les justifications mathématiques – green ostrogradski dans [REF-Math-3]

Fonctionnement des micros d'une guitare électrique

Cette relation est particulièrement intéressante. Prenons le cas d'un micro de guitare électrique. Il est constitué par exemple de six aimants *(cas des micros simples de la marque Fender)*, chacun situé au dessous d'une corde. Ces aimants sont entourés d'une bobine, et pour simplifier nous supposons que cette bobine a une forme elliptique.

Alors amis du Rock bonjour, *« du vrai Rock»*, celui des amplis qui saturent et des grattes à fort niveau de sortie … les aimants provoquent l'aimantation des cordes *(elles sont en acier)* ainsi quand une corde vibre *(nous pourrons calculer cette vibration en résolvant l'équation des cordes vibrantes cf premier article)* elle provoque une perturbation du champ magnétique dans la bobine.

Deux situations se présentent, pour la première la corde aimantée vibre, ce qui provoque une variation de champ magnétique dans la bobine et donc une force électromotrice.

Pour la seconde, mécanique, la corde vibrant, le corps vibre aussi, et le micro se met à bouger légèrement au dessous de la corde. A nouveau le champ magnétique varie. Dans ce cadre nous pouvons imaginer deux vibrations, une vibration qui translate légèrement le micro au dessous des cordes, la translation est suivant l'axe *(ox)* et ou l'axe *(oy)*. Il peut aussi y avoir légère rotation autour de l'axe *ox* et ou *oy*.

Sur le plan de l'instrument, le choix des micros est important. Si on veut un *« gros son »*, un bon niveau de sortie, il convient d'une très bonne aimantation *(et d'un paquet de conducteurs enroulés)*. En revanche, si les aimants sont trop forts ils vont freiner la cordes ce qui peut nuire à la durée de la vibration, au Sustain. En revanche le micro à lui tout seul ne fait pas tout *(outre la qualité du guitariste, le choix des cordes, le chevalet, le système d'amplification et les boucles d'effets)* intervient aussi la qualité de la Lutherie *(une bonne part du prix de la guitare, le choix des bois, …)*, La vibration intrinsèque. Même si en proportion la contribution de la corde vibrante est majoritaire, la seconde joue un rôle important, ce sont les 5 à 10% qui font la différence *(à rapprocher du prix)*.

Illustrons-le propos par le calcul. Pour cela on suppose la bobine elliptique. Nous nous plaçons dans un repère où l'équation de l'ellipse est :

$$y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Ici l'axe *(ox)* est l'axe parallèle aux cordes de la guitare. L'axe *(oz)* est parallèle aux lignes de champ *(les plots des micros)* et *(oy)* dans le plan du micro et orthogonal à ox.

Le champ B de la corde est perpendiculaire au plan de l'ellipse et d'intensité constante *(du moins dans la zone où nous effectuons le calcul)* et de la forme :

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -B_0 F(x)\boldsymbol{e_z}$$

Où F est nulle partout sauf si $x \in [x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}]$ où elle vaut 1. Ici epsilon désigne l'épaisseur de la corde négligeable devant a *(la longueur de l'ellipse étant 2a)*.

Le calcul du flux est assez simple :

$$\varphi = bB_0 \int_{x_0-\varepsilon/2}^{x_0+\varepsilon/2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

On considère le changement de variable :

$$\sin(u) = \frac{x}{a} \Longrightarrow \begin{cases} a\cos(u)\, du = dx \\ a\sin u_- = x - \varepsilon/2 \\ a\sin u_+ = x + \varepsilon/2 \end{cases} \Longrightarrow e = bB_0 a \int_{u_-}^{u_+} \cos^2(u)\, du$$
$$= \frac{abB_0}{2}\left(u_+ - u_- + \int_{u_-}^{u_+} \cos(2u)\, du\right)$$

Or

$$\int_{u_-}^{u_+} \cos(2u)\, du = \frac{1}{2}\left(\sin(2u_+) - \sin(2u_-)\right)$$

Si on écrit tout :

$$\varphi = \frac{abB_0}{2}\left(\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right) - \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right) - \sin\left(2\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)\right)$$

Or, en utilisant des formules de trigonométries comme :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

On va simplifie cela

$$\varphi = \frac{abB_0}{2}\left(\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right.$$
$$- \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right) + \frac{1}{2}\left(2\sin\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right.$$
$$\left.\left. - 2\sin\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{abB_0}{2}\left(A + \left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)\cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right) - \left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)$$
$$= \frac{abB_0}{2}\left(A + \frac{\varepsilon}{2a}\left(\cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right) + \cos\operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)\right)$$

En développant au premier ordre :

$$\varepsilon < x \ll a \Longrightarrow \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right) \sim \frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}$$

$$\frac{abB_0}{2}\left(A+\frac{\varepsilon}{2a}\left(cosasin\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)+cosasin\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)\right)\sim\frac{abB_0}{2}\left(A\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon}{2a}\left(cos\left(\frac{x}{a}+\frac{\varepsilon}{2a}\right)+cos\left(\frac{x}{a}-\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right)\right)=\frac{abB_0}{2}\left(2\frac{\varepsilon}{a}+\frac{\varepsilon}{a}\left(cos\left(\frac{2x}{a}\right).cos\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)\right)$$
$$=bB_0\varepsilon(1+\frac{1}{2}cos\left(\frac{2x}{a}\right).cos\left(\frac{\varepsilon}{a}\right))$$

Ainsi posant :

$$x = x_c + x_0 \sin(wt)$$

On peut dériver l'expression et déterminer la force électromotrice générée.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

Ceci provoque la circulation d'un courant i qui à son tour va créer un champ magnétique cherchant à s'opposer à la variation du premier *(freiner la corde ?)*.

La seconde contribution, les mouvements de micro translations translation dans l'axe ox sont nuls mais pas ceux qui sont perpendiculaires.

Dans ce cas le calcul est similaire au précédent.

$$\varphi = bB_0 \int_{x_0(t)-\varepsilon/2}^{x_0(t)+\varepsilon/2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

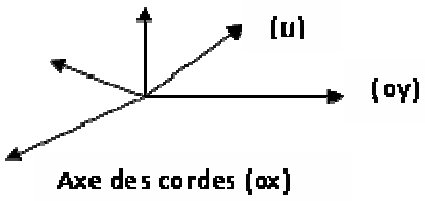
Les deux rotations d'axe **ox** et **oy** peuvent être introduites dans le calcul de manière assez simple.

$$\theta_x = (e_y, u)\ plan(e_y, e_z), \theta_y = (e_z, v)\ plan(e_x, u)$$

Tout d'abord la rotation d'axe ox donne un vecteur u :

(v)

$$u = \cos(\theta_x)\, e_y + \sin(\theta_x)\, e_z$$



La rotation d'axe oy donne un

$$v = \cos(\theta_y)\, e_x + \sin(\theta_y)\, u = \cos(\theta_y)\, e_x + \sin(\theta_y)\sin(\theta_x)\, e_z + \cos(\theta_x)\sin(\theta_y) e_y$$

$$\varphi = bB_0 \int_{x_0(t)-a/2}^{x_0(t)+a/2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx \sin(\theta_y)\sin(\theta_x)$$

Ce n'est pas l'objet de ce document, toutefois les notions de champs électrique et de champ magnétique sont couplées par un système d'équations *(équations de Maxwell)* ces dernières mettent en évidence le caractère ondulatoire de ces deux éléments. L'onde résultante dite onde électromagnétique est associée à la lumière. Il existe un autre Lagrangien qui permet d'exprimer l'ensemble des équations de Maxwell. Ce dernier contient le tenseur de Faraday regroupant dans le même objet mathématique les deux éléments – magnétique et électrique. Mais c'est peut être un peu tôt pour l'introduire-il faut se préparer à raisonner en dimension 4 dans le cadre de la mécanique relativiste dont nous allons toucher quelques mots maintenant.

Mécanique relativiste

Et cette lumière est tout à fait particulière. Elle se déplace à une vitesse propre identique dans tous les référentiels. Ce caractère « absolu » a donné naissance à la théorie de la relativité.

Considérons un *« chariot des années 2169 »*en mouvement de translation uniforme par rapport au sol avec une vitesse v. Au centre du chariot un mat de hauteur H avec en son sommet un miroir et en bas une source de lumière.

A l'instant t=0 nous considérons deux observateurs, le premier O' est sur le chariot au bas du mat et le second au sol. Leurs horloges sont synchronisées et en t'=t=0 les deux observateurs occupent la même position x'=x. En t=0 O et O' se mettent d'accord pour que O' émette un rayon de lumière en direction du miroir. Les deux mesurent le temps de retour du photon émis.

Pour O le temps mesuré est t et pour et pour O' la mesure indique t'. Pour O' le calcul de la trajectoire est simple, elle est verticale et le temps mis est :

$$c't' = 2H$$

Pour O la relation est :

$$c^2\frac{t^2}{4} = H^2 + v^2\frac{t^2}{4}$$

En combinant les deux relations nous obtenons :

$$c^2t^2 = c'^2t'^2 + v^2t^2 \Longrightarrow t^2(c^2 - v^2) = c'^2t'^2 \Longrightarrow t'^2 = t^2(\frac{c^2}{c'^2} - \frac{v^2}{c'^2})$$

L'expérience de Michelson Morley a mis en évidence que c=c', c'est-à-dire que la lumière se déplace à la même vitesse dans tous les référentiel. Ainsi :

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Cette lumière est tout à fait particulière. Elle se déplace à une vitesse propre identique dans tous les référentiels. Ce caractère *« absolu »* a donné naissance à la théorie de la relativité.

Transformations de Galilée – approximation – le défit porté par la Lumière

Cette relation est tout à fait remarquable. Le temps ne s'écoule pas de la même manière dans tous les référentiels. Les lois de transformation de Galilée sur lesquelles s'appuient la cinématique classique et la dynamique ne sont plus valables dans l'absolu, rappelons les :

$$\begin{cases} x' = x - v_x t \\ y' = y - v_y t \\ z' = z - v_z t \end{cases}, t' = t$$

Ces lois s'obtiennent géométriquement assez simplement dans un espace géométrique Euclidien à l'aide de la formulation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}$$

Il en découle la loi de combinaison des vitesses :

$$V_O(\dot{M}) = V_O(\dot{O'}) + V_{O'}(\dot{M})$$

Rappelons l'équation d'onde à une dimension de la lumière :

$$(\partial_{x'}{}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}{}^2)Y = 0$$

Si cette expression est invariante par changement de repère on doit retrouver la même forme dans un autre repère en mouvement.

$$dY = \partial_x Y dx + \partial_t Y dt = dY = \partial_{x'} Y dx' + \partial_{t'} Y dt' = \partial_{x'} Y(dx - v_x dt) + \partial_{t'} Y dt$$
$$= \partial_{x'} Y(dx) - v_x \partial_{x'} Y dt + \partial_{t'} Y dt)$$

Ce qui donne :

$$\partial_x = \partial_{x'}, \partial_{t'} = \partial_t - v_x \partial_x$$

D'où :

$$\partial_{x'}{}^2 = \partial_x{}^2, \partial_{t'}{}^2 = \partial_{t'}(\partial_t) - v_x\partial_{t'}(\partial_x) = \partial_t{}^2 - v_x\partial_x\partial_t - v_x(\partial_t\partial_x - v_x\partial_x^2)$$
$$= \partial_t{}^2 - 2v_x\partial_x\partial_t + v_x{}^2\partial_x^2$$

En reportant dans

$$(\partial_{x'}{}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}{}^2)Y = 0$$

Cela donne :

$$(\partial_x{}^2 - \frac{1}{c^2}(\partial_t{}^2 - 2v_x\partial_x\partial_t + v_x{}^2\partial_x^2))Y = (\partial_x^2(1 - \frac{v_x^2}{c^2}) - \frac{1}{c^2}\partial_t{}^2 + \frac{2v_x\partial_x\partial_t}{c^2})Y = 0$$

Nous constatons d'une part une forte altération de l'équation des ondes électromagnétique lors d'un changement d'observateur associé à un référentiel en mouvement. Nous remarquons d'autre part la présence du terme $en\,(1 - \frac{v_x^2}{c^2})$.

Transformation de Lorentz – recherche d'invariants relativistes

Alors recherchons dans un cadre simplifié, mouvement de translation uniforme, la loi de transformation qui embarque la propriété d'invariance de la vitesse de la lumière. Pour cela nous recherchons une loi linéaire *(commencer par faire simple et proche des lois de transformation de Galilée puisqu'elles correspondent très bien à la réalité vue de nos échelles de vitesses)* de changement de repère :

$$(ct', x', y', z') = \left(A = (a_{i,j})\right)(ct, x, y, z)$$

Parmi toutes les lois de transformation linéaires, nous cherchons celles qui laissent invariantes la forme quadratique :

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

En effet pour la lumière nous avons *(une manière d'embarquer l'invariance de la vitesse de la lumière dans le problème)* :

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2}$$

Le terme ds à la forme d'une distance entre deux événements si on considère un espace de dimension 4 et de métrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Les -1 sont sur toute la diagonale à l'exception du premier terme. Un tel espace est dit espace de Minkowski du nom du Mathématicien *(qui fut professeur du célèbre physicien Albert Einstein il me semble)*.

La loi d'invariance implique :

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Pour simplifier la calcul on se place en dimension 2 *(ct,x)* ce qui donne la relation :

$$\begin{cases} t' = At + Bx \\ x' = Yt + Zx \end{cases}$$

Reportant cette relation dans l'égalité précédente :

$$c^2t^2 - x^2 = c^2(At + Bx)^2 - (Yt + Zx)^2 = c^2(A^2t^2 + B^2x^2 + 2ABxt) - (Y^2t^2 + Z^2x^2 + 2YZtx)$$
$$= t^2(A^2c^2 - Y^2) + x^2(B^2c^2 - Z^2) + 2xt(c^2AB - YZ)$$

Ainsi

$$\begin{cases} c^2 = A^2c^2 - Y^2, 1 = A^2 - \frac{Y^2}{c^2} \\ 1 = Z^2 - B^2c^2 \\ ABc^2 = YZ \end{cases}$$

D'autre part nous pouvons intégrer une nouvelle relation en nous plaçant à l'origine du repère en mouvement.

$$x' = 0 \to Yt + Zx = 0 \to \frac{x}{t} = -\frac{Y}{Z} = v$$

Nous pouvons envisager un changement de variable en exploitant les fonctions « de trigonométrie hyperbolique » :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ch^2 - sh^2 = 1\ th = \frac{sh}{ch}$$

$$\frac{1}{ch^2} = 1 - th^2, \frac{1}{sh^2} = \frac{1}{th^2} - 1$$

Ainsi :

$$ch(a) = A, sh(a) = \frac{Y}{c}, ch(b) = Z, sh(b) = Bc, th(a) = \frac{Y}{cA}, th(b) = \frac{Bc}{Z}$$

$$ABc^2 = YZ \to ch(a)\frac{sh(b)}{c}c^2 = csh(a)ch(b) \to th(a) = th(b)$$

Donc

$$-\frac{Y}{Z} = v \to \beta^2 Z^2 = Y^2 \to \frac{1}{\beta^2 ch^2(b)} = \frac{1}{c^2 sh^2(a)} \to 1 - th^2(b) = \beta^2\left(\frac{1}{th^2(b)} - 1\right) \to 1 - \frac{B^2c^2}{Z^2}$$
$$= \beta^2\left(\frac{Z^2}{B^2c^2} - 1\right) \to \frac{Z^2 - B^2c^2}{Z^2} = \beta^2\left(\frac{Z^2 - B^2c^2}{B^2c^2}\right) \to B^2c^2 = \beta^2 Z^2$$

Ce qui permet de déterminer Z :

$$1 = Z^2 - B^2c^2 \to 1 = Z^2 - \beta^2 Z^2 = Z^2(1 - \beta^2) \to \boldsymbol{Z = \mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mp\gamma}$$

Puis B

$$B^2c^2 = \beta^2 Z^2 \to B^2 = \frac{\beta^2}{c^2} Z^2 \to \boldsymbol{B = \frac{\beta}{c} \mp Z}$$

Puis Y et A

$$-\frac{Y}{Z} = v \to \boldsymbol{Y = -c\beta Z}$$

$$ABc^2 = YZ \to A\frac{\beta}{c} Zc^2 = -c\beta Z^2 \to \boldsymbol{A = \frac{-c^2\beta Z^2}{\beta Z c^2} = -\mp Z}$$

Nous retenons :

$$Z = \mp\gamma, A = -Z, B = \frac{\beta}{c} Z, Y = -c\beta Z$$

Nous pouvons traduire :

$$t' = At + Bx$$
$$x' = Yt + Zx$$

Par :

$$t' = -Zt + \frac{\beta}{c} Zx = Z\left(-t + \frac{\beta}{c} x\right)$$

$$x' = -c\beta Zt + Zx = Z(-vt + x)$$

Pour obtenir une forme analogue aux transformations de Galilée *(limite de la transformation recherchée quand beta tend vers zéro)* on aboutit à :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c} x) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

Nous allons vérifier que cette transformation préserve bien **ds**, en effet :

$$t'^2 = \gamma^2 t^2 - 2\gamma^2 \frac{\beta}{c} xt + \gamma^2 \frac{\beta^2}{c^2} x^2$$

$$x'^2 = \gamma^2 x^2 - \gamma^2 2\beta c x t + \beta^2 c^2 \gamma^2 t^2$$

D'où :

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) - x^2 (-\gamma^2 \beta^2 + \gamma^2) = c^2 t^2 - x^2$$

Revenons sur l'équation de propagation de l'onde électromagnétique *(en une dimension)* et observons la manière dont elle est transformée par la transformation de Lorentz établie ci-dessus et rappelée ci-dessous :

$$t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c} x)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$

Tout comme le cas des transformations de Galilée on procède par égalisation de la différentielle totale :

$$dY = \partial_{x'} Y dx' + \partial_{t'} Y dt' = \partial_{t'} Y \gamma \left(dt - \frac{\beta}{c} dx \right) + \partial_{x'} Y \gamma (dx - v dt)$$
$$= \gamma dx \left(\partial_{x'} Y - \frac{\beta}{c} \partial_{t'} Y \right) + \gamma dt (\partial_{t'} Y - v \partial_{x'} Y)$$

D'où :

$$\begin{cases} \gamma(\partial_{x'} - \frac{\beta}{c} \partial_{t'}) = \partial_x \\ \gamma(\partial_{t'} - v \partial_{x'}) = \partial_t \end{cases}$$

On établie l'expression des dérivées secondes :

$$\begin{cases} \gamma^2 (\partial_{x'} - \frac{\beta}{c} \partial_{t'})(\partial_{x'} - \frac{\beta}{c} \partial_{t'}) = \gamma^2 (\partial_{x'}^2 - 2\frac{\beta}{c} \partial_{x'} \partial_{t'} + \frac{\beta^2}{c^2} \partial_{t'}{}^2) = \partial_x{}^2 \\ \gamma^2 (\partial_{t'}{}^2 - 2v \partial_{x'} \partial_{t'} + v^2 \partial_{x'}{}^2) = \partial_t{}^2 \end{cases}$$

Donc

$$\partial_x{}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t{}^2 = \gamma^2 (\partial_{x'}^2 - 2\frac{\beta}{c} \partial_{x'} \partial_{t'} + \frac{\beta^2}{c^2} \partial_{t'}^2 - \frac{\partial_{t'}^2 - 2v \partial_{x'} \partial_{t'} + v^{2\partial_{x'}{}^2}}{c^2})$$
$$= \gamma^2 (\partial_{x'}^2 (1 - \beta^2) - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 (1 - \beta^2)) = \partial_{x'}{}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}{}^2$$

Il y'a bien invariance. La transformation de Lorentz laisse invariante l'équation de propagation de l'onde électromagnétique ce qui concorde avec le fait que la lumière se propage à la même vitesse dans tous les référentiels.

Dilatation du temps – contraction des longueurs – temps propre

A présent nous allons mesurer un élément de longueur vu de O'

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx) \end{cases}$$

Ces relations peuvent être combinées pour mesurer le rapport de perception d'un élément de longueur, on mesure dx' à un instant t' donné *(donc dt'=0)*

$$dx' = \gamma\left(dx - v\left(\frac{dt'}{\gamma} + \frac{\beta dx}{c}\right)\right) \rightarrow dx' = \gamma dx - \gamma\beta^2 dx = \gamma(1 - \beta^2)dx$$

On mesure ensuite un intervalle de temps dt' *(dx'=0 et donc dx=0)*:

$$dt' = \gamma dt$$

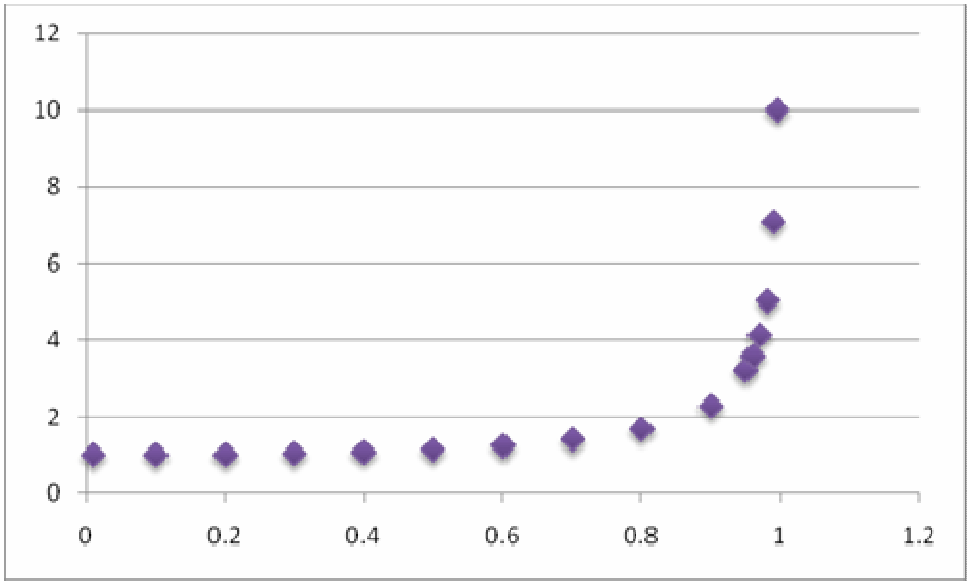
D'où les relations :

$$dx' = \frac{dx}{\gamma}$$

$$dt' = \gamma dt$$

Dilatation du temps et contraction des longueurs.

On peut faire le calcul de la fonction gamma, en abscisse beta *(pourcentage de vitesse de la lumière)* et en ordonnée la valeur de gamma *(multiplie le temps propre – temps de l'observateur en mouvement : donne la mesure de temps mesurée par un observateur)*



Aux alentours de 80% c'est-à-dire une vitesse de l'ordre de 240 000 Km à la seconde le rapport est de l'ordre de 2 *(un peut moins si on veut être précis)*. Dans ce cadre si deux jumeaux font l'expérience suivante : le premier par à cette vitesse, le second reste au sol. L'expérience a lieue à l'âge de 40 ans par exemple, le premier revient au bout de 5 ans, le premier aura 45 ans alors que le second aura 50 ans.

A cinquante pourcent de la vitesse de la lumière 10 secondes de temps propre correspond à 11,5 secondes, un écart de temps de 9 secondes par minutes. 50% de la vitesse de la lumière c'est quand même 150 000 km/s *(la moitié de la distance terre lune parcourue en une seconde)*.

Nous remarquons aussi une singularité, une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière n'a pas de réalité physique. C'est bien ennuyeux tout ça … pour ton fan de Science Fiction. Mais qu'il se rassure… ce n'est qu'une théorie …qui marche toutefois particulièrement bien.

Géométrie de Minkowski – Espace Temps

Poursuivons un petit moment autour de l'espace de Minkowski, et pour simplifier considérons-le de dimension 2 *(un seul degré de liberté dans l'espace)*. *Pour aller plus loin [REF-Phy-2]*

Nous avons introduit une métrique particulière qui va nous permettre de faire du calcul :

$$AB = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2$$

La signification physique étant A précède B.

Nous pouvons aussi calculer un produit scalaire :

$$A(A_0,A_1), B(B_0,B_1) \rightarrow < A,B > = A_0B_0 - A_1B_1$$

Les vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul, ainsi :

$$A \perp B, \prec A,B \succeq 0, \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_1}{B_0}$$

Notons par (e_1, e_0) une base de cet espace, représentons là dans le plan Euclidien comme orthogonale l'indice 1 porte les abscisses *(l'espace)* et l'indice 0 les ordonnées en temps *(multipliées par c)*. Alors on montre sans difficulté que le sous espace engendrée par $e_0 + e_1$ est axe de symétrie de A et B. Ainsi les vecteurs orthogonaux sont symétriques par rapport à la bissectrice *(droite linéaire d'équation y=x)*.

Autre exemple, nous pouvons montrer que dans cet espace le plus long chemin entre deux points est une ligne droite. Pour cela on considère un chemin allant de A vers B, représenté dans notre plan par une droite, puis un autre passant par un point M. Calculant la distance AM+MB à l'aide de la métrique de Minkowski *(et son fameux signe -)* dérivant cette distance *(cherchant un optimum)* on arrive sur une condition disant que M doit être sur AB. En étudiant la fonction (AM+MB)(M) on s'aperçoit que l'extrema déterminé correspond à un maximum.

Remarquons que le produit scalaire peut être nul *(Les rayons de lumière tracent des vecteurs dont le produit scalaire est nul)*:

$$c^2t^2 - r^2 = 0$$

Remarquons que le produit scalaire peut être strictement positif :

$$c^2t^2 - r^2 > 0$$

Ceci correspond à un événement ayant un sens physique, l'événement se produit à l'intérieur du cône de lumière, si initialement l'événement était à l'origine, présent, son futur est dit de genre temps.

Mais le produit scalaire peut être strictement négatif :

$$c^2t^2 - r^2 < 0$$

L'événement est à l'extérieur du cône de lumière, on dit qu'il est du genre espace. On montre que pour les événements de genre temps le principe de causalité demeure, c'est-à-dire que l'origine du cône précède l'événement, ou vis et versa dans le passé. Mais pour des événements de type espace la relation de causalité n'est pas préservée. On peut trouver des observateurs pour lesquels l'origine précède l'événement et d'autres pour lesquels c'est le contraire.

Transformation de Lorentz dans un cadre général

Une autre fois

Expression d'un Lagrangien à partir d'invariants relativistes

On voit ici que la géométrie de cette physique moderne est bien nouvelle et par endroits demande de sortir de nos habitudes voir *« du bon sens »*. En fait ici il s'agit d'explorer des zones du réel qui nous sont étrangères… parfois même qui n'existent pas. Sur un plan historique l'espace de Minkowski a soulevé

une certaine polémique du fait en particulier que la réalité physique était cachée par les mathématiques.

Nous n'allons pas nous étendre d'avantage sur le sujet et retenir deux invariant :

- Le temps propre *(notre horloge et non celle qui est perçus par un autre)*
- La distance $ds^2=c^2t^2-dr^2$

Nous allons chercher un Lagrangien en nous inspirant du Lagrangien précédent mais qui sera aussi préservé lors des changements de repères pour embarquer les remarques de la théorie moderne de la relativité *(publiée par Albert Einstein au début du 20 ième siècle)*

L'élément de longueur *(abscisse curviligne)* s'exprime donc par

$$ds = cdt$$

L'élément ds est un invariant, c aussi mais l'intégrant dt ne l'est pas, pour que le Lagrangien soit invariant du fait des transformations de Lorentz il faut ramener l'intégrant au temps propre *(dt0)*, l'expression suivante est à considérer :

$$ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt_0$$

Nous proposons d'introduire le Lagrangien suivant *(Invariant de Lorentz)*:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

- Nous ajoutons les ingrédients qui permettent de retrouver à faibles vitesses *(nous avons vue le caractère asymptotique « très tardif » de gamma)* le Lagrangien classique :

$$L\sim -mc^2+\frac{mc^2}{2}\frac{v^2}{c^2} = -mc^2+m\frac{v^2}{2}$$

Remarquons cette quantité mc^2. L'énergie de masse, on ne la ressent naturellement qu'au niveau atomique…

Calculons l'énergie en rappelant l'expression déterminée lors de la recherche des équations de Lagrange:

$$E = pv - L$$

Ceci nous donne :

$$p = \partial_v L = -mc^2 \frac{-2\frac{v}{c^2}}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

D'où l'énergie :

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v^2}{c^2}+1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Equivalence masse - énergie

Nous trouvons ici pour la particule au repos, v=0 une expression célèbre pour sa forme *(et tristement par certaines utilisations…passées et potentielles)* c'est l'équivalence masse énergie.

$$\delta E = \delta m c^2$$

Considérons une variation de 1 pour mille de masse, la variation d'énergie est :

$$\delta E = c^2\left(\frac{m}{1000}\right)$$

Sur une masse initiale de 1kg, cela correspond à un gramme, l'énergie est colossale. Lors du processus de Fusion ou de Fission nucléaire de la masse disparaît, le défaut de masse apparaît sous la forme d'énergie. De l'énergie pure peut produire de la masse, par exemple une paire de particule et antiparticule *(électron et positron)* etc.

Potentiel de gravitation et métrique

Reprenons le Lagrangien précédent et étendons le dans le contexte d'un champ central :

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m\varphi$$

En développant au premier ordre :

$$L \sim -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi = -mc\left(c - \frac{v}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)$$

L'action invariante, exprimée à partir de c et du temps propre est :

$$S = \int L dt$$

Elle est aussi exprimée par :

$$S = -mc\int ds$$

En écrivant donc :

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 = (c - \frac{v}{2c} + \frac{\varphi}{c})^2c^2dt^2$$

En négligeant tous les termes proportionnels à $\frac{1}{c^2}$:

$$g_{00} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c}}$$

La métrique associée à un champ de gravitation central *(inversement proportionnel à la distance)*, statique *(ne dépendant pas du temps)* à distribution isotrope *(la répartition de masse ne privilégie aucune direction)* a établie en 1916 par le mathématicien K. Schwartzchild. *Pour aller plus loin [REF-Phy-2]*

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2\varphi(\rho)}{c^2}\right)dt^2 - \frac{d\rho^2}{\left(1 + \frac{2\varphi(\rho)}{c^2}\right)} - \rho^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2\, d\vartheta^2)$$

Suivant cette métrique, nous considérons un déplacement dans le temps *(pas dans l'espace)* vue du référentiel de l'élément, l'élément de longueur s'exprime en temps propre :

$$c^2d\tau = ds^2$$

Vu d'un autre observateur, pas de déplacement spatial cela se traduit par :

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2\varphi(\rho)}{c^2}\right)dt^2$$

D'un point de vue général on aurait :

$$ds^2 = g_{0,0}c^2dt^2$$

Nous obtenons :

$$d\tau = \sqrt{g_{0,0}}dt \Leftrightarrow dt = \frac{d\tau}{\sqrt{g_{0,0}}}$$

Posons :

$$\varphi(\rho) = -\frac{GM}{\rho}, r_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

$$1 + \frac{2\varphi(\rho)}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{\rho c^2} = 1 - \frac{r_0}{\rho}$$

Ainsi :

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{g_{0,0}}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{\rho}}}$$

On voit bien que lorsque $\rho \gg r_0$ alors le temps relatif et le temps propre sont très proches. En revanche lorsque les valeurs se rapprochent le temps relatif augmente en forte proportion. Une singularité est obtenue quand ils sont identiques. Cette singularité porte le nom d'horizon de Schwartzchild, lorsque toute la mase est contenue dans cette horizon l'objet imaginé est appelé trou noir.

Pour une masse telle que celle de la terre, la densité de matière serait telle que le rayon serait d'un peu moins de 6 mm.

Les trous noirs sont des objets théoriques utilisés en astrophysique pour expliquer certains comportements de l'univers. La vie d'une étoile par exemple est un incessant *« combat »* entre deux grandes forces de la nature, les forces liées à la gravitation, qui tendent à tasser la matière sur elle-même, et les forces nucléaires, la matière se tasse et des réactions nucléaires se produisent produisant une énergie colossale, la relation $E=mc^2$ l'exprime en partie. L'effondrement gravitationnel se produit lorsque la pompe nucléaire n'arrive puis à compenser. Sous certaines conditions le résultat est un objet de forte densité de masse, parmi ces objets, les trous noirs.

Conclusion

Tout au long de ce document nous avons produit quelques calculs mathématiques relativement élémentaires. Pour aller plus loin il serait nécessaire de creuser d'avantage l'outil sur un plan conceptuel. La théorie de la relativité générale par exemple demande à creuser davantage la notion de géométrie différentielle et à se familiariser avec l'analyse tensorielle. D'autre part nous n'avons pas évoqué le formalisme Hamiltonien de la mécanique ni les analogies structurelles au sens mathématique entre les équations de Schrödinger de la mécanique quantique et celle de la mécanique classique, ni l'apport important de la théorie des groupes dans la recherche d'intégrales premières *(constantes du mouvement – invariants)*. Nous avons aussi totalement occulté la thermodynamique et la physique nucléaire.

Nous avons tout de même évoqué l'optique géométrique *(et quelque part ondulatoire lors de notre « escapade » du coté des lois de l'électromagnétisme)*, la mécanique, la relativité, l'électromagnétisme et très superficiellement la gravitation à partir d'un principe unique et commun de calculs de variations. La physique moderne *(relativité et mécanique quantique)* est une avancée importante pour la connaissance, non seulement sur le plan pratique, puis théorique, mais aussi car elle nécessite de penser la physique différemment, de sortir des théories bien acquises, particulièrement performantes mais approchées et basée sur des concepts à revoir. Ce n'est pas en soit une révolution, le concept de révolution est parfois douteux, c'est plutôt une évolution car englobe les théories précédentes.

Cette légère introduction avait simplement pour objet d'évoquer, de manière toutefois suffisamment précise, que des pans de la physique pouvaient peu à peu devenir des chapitres des mathématiques. Que si l'expérimentation donnait lieu à des équations puis des lois locales exprimées mathématiquement, ces expressions ont une structure et qu'il est intéressant de comprendre, chercher s'il n'existe pas des objets mathématiques fédérant ou plutôt unifiant davantage les connaissances objectives du monde physique.

Alors musicien amateur de guitare électrique, attentif à la modernité et à tous ces appareils fabuleux qui délivrent en un simple click un gros son, comme sur le disque de x ou y. Si l'électronique numérique a permit de porter l'informatique *(algorithmique)* à presque tous les niveaux, les progrès énormes en micro électronique, en architecture des calculateurs et en physique des matériaux, les appareils qui en résultent donnent parfois cette impression, ce sentiment d'être un peu coupé du monde vrai. Au bout d'un moment on peu se lasser, chercher autre chose, une simple basse branchée en direct sur un ampli, une guitare branchée en direct sur un Marshall *(☺ non pas d'action chez jim)*, une belle lutherie, des micros passifs de bonne qualité *(une belle Gibson SG par exemple – ou LAG ARKANE ☺)*… et soi, collé à l'instrument, … pas trop quand même, juste plus prêt du son.

La physique mathématique est une très belle représentation, mais un produit théorique, habitée d'approximations multiples. Ainsi la substance d'un tel document n'enlèvera jamais l'aspect pratique des choses, l'alchimie de l'expérimentateur, de tous ses cahiers de notes, de cette fois qui l'anime dans ses tâtonnements récursifs.

Raimon Panikkar : *« Source de ce qui est, ce qui est et son dynamisme »*.

Eléments de référence

Ci-dessous quelques ouvrages qui aideront à approfondir, sur le plan mathématique et sur le plan physique.

Physique

- [REF-Phys-1] Space Time Matter : Hermann Weyl – Dover Publications Inc
- [REF-Phys-2] Théorie de la Relativité Générale, une approche géométrique : Malcom Luvigstein – Dunod
- [REF-Phys-3] Principes vibrationnels et dynamique : J.L. Basdevant – Vuibert
- [REF-Phys-4] Physique Théorique, Tome 1, Mécanique : L. Landau, E. Lifchitz - Editions Mir 1982

Mathématiques

- [REF-Math-1] Cours de Mathématiques, Tome 1 : J. Bass – Masson & Cie
- [REF-Math-2]Commande Optimale : V. Alexéev, V. Tikhomirov, S. Fomine – Editions Mir 1982
- [REF-Math-3]Algèbre et analyse linéaire : Lichnerowicz
- [REF-Math-4]Formes quadratiques & groupes classiques: Deheuvel - PUF