Sommaire

Avant propos

Nous proposons ici un nouvel article consacré au son étudié comme onde acoustique. Pour cela nous allons dans un premier temps caractériser une idéalisation du milieu ambiant, l'air. Après tout c'est là que le son prend place. Bien entendu nous commencerons par quelque chose de simple, en assimilant, par exemple, l'air à un gaz parfait. Ceci va nous permettre de donner une relation assez simple entre pression, température, et densité de masse. Nous supposerons aussi que les expériences que nous mènerons par la pensée seront faites à température constante, et sans échange de chaleur *(on dit isotherme, adiabatique)* les aspects thermodynamiques ne sont pas pris en compte.

Toujours pour simplifier nous supposerons ce milieu à l'équilibre, immobile et continu afin d'y étudier mathématiquement l'influence d'une légère perturbation en pression et en vitesse.

Alors partant d'un principe issu de l'observation qualifié de *« conservation de la matière »* nous établirons une équation liant la densité de matière à la vitesse de celle-ci. Cette relation, très utile par exemple lors de l'étude des *« phénomènes de transport »* qui montrent par exemple que naturellement la matière va de zones concentrées vers des zones moins concentrées *(théorie utilisée entre autre en physique des semi conducteurs et permettant d'établir les modèles mathématiques des composants type diode ou transistor)*, constituera notre premier outil.

Partant du principe fondamental de la dynamique *(évoqué sous forme variationelle dans le précédent « article »)* nous mettrons en relief une relation entre pression, densité de masse et vitesse. L'équation dite d'Euler, particulièrement utilisée en mécanique des fluides, constituera notre second outil.

A partir de la linéarisation *(hypothèse de légère perturbation du milieu)* de ces deux équations nous *« établirons »* une équation différentielle aux dérivées partielles du type de celle obtenue pour les cordes *(sur laquelle nous reviendrons dans ce document)* mais en ouvrant davantage le champ d'application *(en effet embarquant d'autres grandeurs physiques que l'amplitude de vibration d'une corde, comme la pression et la vitesse)*. Cette équation, dite d'Helmholtz, résultant de l'hypothèse de petites variations, constituera notre troisième outil. Nous verrons à ce propos que sous sa forme, cet outil porte en lui un ensemble riche de solutions. Nous chercherons alors naturellement parmi ces solutions les plus simples, ouvrant ainsi l'accès à quelques calculs analytiques classiques dont les résultats seront rapprochés de quelques expériences communes.

Parmi elles, par exemple lorsqu'on excite une corde de guitare proche du chevalet le son est plus brillant, plus aigue, autre exemple, la différence de timbre entre une clarinette et une flute ou bien à proximité des salles de concert on entend la basse et la grosse caisse et c'est tout alors qu'à l'intérieur le son des guitares saturées percent les tympans…enfin comment réduire l'effet d'une source sonore par une autre.

Ce document appellera peut être un autre consacré à l'étude de la vibration des structures, en effet nous verrons dans ce document que la corde vibrante, par le chevalet, induit un champ de force localisé et décomposé en une série de forces harmoniques. Ce champ de force provoque une vibration de la caisse de la guitare. Dans le cas d'une guitare classique un couplage est à établir entre la vibration de cette structure par les cordes et le son produit, c'est-à-dire l'expression du champ de pression. Dans le cas d'une guitare électrique, nous avons évoqué dans le document précédent, deux causes de création de la force électromotrice induite dans les micros. La première par la corde magnétisée, nous avons dit à ce propos la cause principale. La seconde est la vibration du micro sous la corde. Le second phénomène est lié à la nature du bois, et plus généralement à la Lutherie. Il y'a derrière cela par mi d'autres une question, si on prend une guitare électrique de moyen de gamme, par exemple les fabrications en série LAG Standard 100 ou 200 et qu'on équipe ces guitares micros type Seymour Duncan TB6 & Pearly Gate *(de bonne qualité)* aurons nous un équivalent au modèle supérieur LAG 500 voir 1000 *(l'équipant des mêmes micros)*? Pour aborder cette question d'un point de vue théorique nous aurons besoin d'évoquer un pan important de la physique, la mécanique des milieux continus. Ce qui demande un travail préparatoire important et sur les notions physiques et sur les éléments de mathématiques nécessaires.

Caractérisation de la propagation du son, équations fondamentales

Considérons un fluide, ce dernier est idéalisé non comme une somme de particules en mouvement *(vue discrète)* mais par deux grandeurs continues, la première est la densité de matière, ou densité de masse noté. On parle ici de champ scalaire, fonction de 4 variables d'espace temps vers l'ensemble des nombres réels. La seconde représente le déplacement du fluide, il s'agit d'un champ de vecteurs, nous avons besoin d'orientation, le fluide se déplace dans une multitude de directions. Le champ de vecteur vitesse est une application de 4 variables réelles d'espace temps vers un espace vectoriel donné attaché à un point *(référentiel)* nous le notons.

Conservation de la matière

Traduisons mathématiquement l'observation suivante : considérant un volume donné, ce dernier est limité en pensée par une surface fermée. Le flux de matière qui entre au travers de cette surface moins le flux de matière qui sort de cette surface sur un laps de temps donné représente, au signe prés, la variation de matière à l'intérieur du volume.

Le flux de matière est représenté par analogie avec la mécanique classique par une densité volumique de quantité de mouvement que nous notons :

Ainsi considérant un élément de surface noté ds autours d'un point M de la surface l'élément de flux de matière est :

Où le vecteur n est normal à la surface en M et orienté de l'intérieur vers l'extérieur. Cette orientation conditionne le signe de la variation de matière. Ainsi la traduction mathématique devient :

Pour retrouver cette relation, considérons un élément de volume constitué d'une section ds et d'une longueur orienté suivant l'axe portant la variable de position x. dt l'intervalle de temps correspondant à l'observation.

Ce qui rentre à l'origine du tube en ressort en t+dt à une distance augmenté de toute la matière qui aura été générée dans cet élément de volume. Ceci s'écrit avec un développement en série au premier ordre :

En généralisant sur les trois axes on trouve sans difficulté :

On retrouve ce raisonnement en disant que *(l'intégrale porte sur le volume enfermé par la surface)*.

Ce qui équivaut à :

Le volume et la surface étant choisis arbitrairement nous avons :

Ou

Nous avons traduit ici la propriété de conservation de la matière, cette équation est nommée équation de continuité.

Bilan des forces, dynamique

Appliquons à présent le principe fondamental de la dynamique à un élément du fluide. Le bilan des forces exercées s'exprime à partir du champ de pression *(nous négligeons la pesanteur)*.

La pression est un champ scalaire qui exprime la force qui passe au travers un élément de surface. Pour une surface donnée S, en chaque point M on défini un élément de surface ds et une normale

La force s'exprime ainsi *(le signe négatif car la pression a tendance à contrer l'expansion du volume, sens opposé à la normale n)*:

D'où :

L'opérateur est un opérateur de dérivation particulier, en effet on travail sur un champ de vecteur, désignons le La différentielle est :

En développant au premier ordre :

Or :

D'où :

L’opérateur de dérivation d’un champ de vecteur est donc :

Ainsi :

En utilisant le théorème de green on transforme l’équation en :

D’où l’équation dite d’Euler :

Nous disposons à présent de deux équations :

A laquelle on peut ajouter l’équation d’état du fluide : . En effet pour un gaz parfait nous avons :

Où N désigne le nombre de moles, soit M la masse d’une mole.

Nous venons d’établir deux équations importantes mettant en relation trois grandeurs physiques, le champ de pression en tout point du milieu, la densité de matière dans ce milieu et le champ des vitesses de ce milieu. Nous allons chercher à simplifier ce système d’équations en considérant un milieu à l’équilibre que l’on perturbe légèrement. C'est-à-dire que les variations de pressions et vitesses seront approchées par leur dérivée première.

Linéarisation des équations, caractère ondulatoire du champ de pression et des vitesses

On considère à présent une situation où la densité de matière initiale est donnée et stable, le champ de vecteur vitesse y est nul en tout point. Nous considérons une perturbation infinitésimale et cherchons à linéariser le système d'équation.

On considère pour cela une variation de pression et la variation de densité de fluide associée, .

Injectons l'équation de continuité :

Travaillons à présent sur l'équation d'Euler, le champ des vecteurs de vitesse étant nul à l'origine.

Or

Le champ des vitesses étant uniformément nul en t=0.

Il en ressort que

D'où :

Ainsi linéarisé, le système d'équations devient :

En dérivant l'équation de continuité par rapport au temps :

D'autre part :

En posant :

Il vient :

C’est l’équation dite d’Helmholtz. On vérifie sans difficultés ci-dessus que le terme « c » est homogène à une vitesse. Par construction et hypothèses sur le contexte, le paramètre c est une constante.

Etude des ondes planes

Plaçons nous dans l’hypothèse d’un champ de pression indépendant de y et de z. Assimilé à une onde plane *(une dimension)*. L’équation de Helmholtz devient :

Posons :

Alors l’opérateur différentiel se transforme :

Or :

Ainsi :

D’où :

On cherche la solution sous la forme :

Dans ce cas l’équation donne:

Donc :

On suppose que la vitesse à l'origine est constante, sa dérivée est nulle et le gradient de pression en ce point l'est aussi *(suivant l'équation d'Euler)*.

Dans ce cas nous aurons :

Ainsi :

Le champ de pression devient alors :

Supposons en outre qu'en x=L il y'ait aussi un gradient de pression nul *(vitesse constante)*, dans ce cas *(il suffit de dériver l'expression ci-dessus par rapport à x)*:

On constate que ce gradient de pression nul rend les pulsations possibles discrètes, quantifiées. Ainsi seules certaines fréquences sont possibles. Que l'on prenne une corde de guitare violon ou piano, dés qu'on la fixe à deux extrémités on fige une suite de fréquences possibles. Après un retour rapide sur le comportement des cordes et le champ de force induit par le chevalet d'une guitare, nous allons voir qu'il en est de même avec un tuyau *(flute)*.

Corde d'une guitare

Nous allons essayer de mettre en évidence mathématiquement le constat qu'en excitant une corde proche du chevalet, le son résultant est plus aigue, ou du moins fait mieux ressortir les fréquences élevées *(modes de propagations hauts)*.

Pour commencer, on établie assez facilement l'équation de propagation d'une déformation d'une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités, de forme initiale donnée et lâchée sans vitesse.

Si T est la tension supposée uniforme, y l'axe portant l'amplitude et y=0 la corde au repos, si m est la densité linéique de masse alors, négligeant l'effet de la gravitation devant la tension de la corde, on écrit le principe fondamental de la dynamique en un point x, sur un élément de tronçons dl ~dx *(on suppose que le maximum de l'amplitude est très petit devant L)* et on projette sur l'axe y :

Ici le sinus et la tangente sont équivalents à l'angle quand celui-ci est petit, et la tangente représente la dérivée de la fonction *y(x,t)* en ce point *(pente de la droite tangente)*.

Ainsi :

Où nous avons posé :

On vérifie aisément que l'élément introduit, c, est bien homogène à une vitesse.

On vérifie de manière équivalente à ce que nous avons vu précédemment que :

Supposons que la corde est fixée à ses deux extrémités :

Donc f2, et donc f1 et donc y sont des fonctions périodiques de période 2L, on doit pouvoir décomposer y en série de Fourrier.

On peut déterminer y en fonction de f1 :

Ainsi :

Donc :

On trouve sans difficultés que si on impose une vitesse initiale nulle alors la suite {An} est nulle, ainsi il reste après simplification via les formules de trigonométrie classiques :

Les coefficients se calculent assez bien à partir de la forme initiale de la corde y(x,0) :

Supposons que la corde initialement soit tirée d'une hauteur h en x0 de la forme suivante :

Nous allons calculer la force exercée sur la caisse par la corde par le biais du Chevalet. En effet soit alpha l'angle de la corde, la corde étant légèrement excitée, h << L implique que la tangente, le sinus de cet angle est approchable par l'angle. Ainsi la valeur de l'angle équivaut à la dérivée de y par rapport à x en zéro. Alors en projetant sur l'axe y :

Après quelques calculs on trouve :

Nous avons indiqué par F *« l'amplitude des harmoniques de force »*. Nous remarquons ici que beta agit comme un filtre, en effet, tous les modes de propagation *(ou fréquence)* d'ordre proportionnel à beta sont filtrés.

Plus l'excitation se fait proche du chevalet, plus beta est grand, par exemple sur une corde de longueur L égale à un mètre, beta égal à 100 c'est exciter la corde à 1 cm du chevalet. Dans ce cas, les cents premiers modes passent intégralement. Si on excite la corde à la moitié *(50 cm par exemple)* alors c'est la moitié des modes qui sont filtrés, au cinquième, beta égal à 5 et c'est donc 20 modes de vibration qui sont éliminés. De manière générale si on observe le contenu harmonique à partir d'un filtre passe bande quelconque de bande passante donnée, c'est le cas de tout système réel, alors plus on excite la corde proche du chevalet et plus on y trouve d'harmonique.

En effet on peut montrer rapidement en développant à l'ordre 3 la relation :

Ceci exprime par exemple que plus beta est grand, donc x0 petit et donc l'excitation proche du chevalet, les amplitudes sont importantes. On a alors la sensation d'un son plus brillant, relevé en harmoniques aigues.

Propagation à travers un mur

Nous allons ici tenter de mettre en évidence mathématiquement pourquoi les basses fréquences passent mieux au travers des murs. Le mur est ici considéré de densité surfacique de masse m.

Soit pi pr et pt respectivement les pressions incidentes, les pressions réfléchies et transmises. Et vi, vr et vt l'équivalent en vitesse. Nous allons montrer un peu plus loin que *(on admet pour le moment)*:

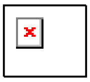
Les indices 1 et 2 désignent respectivement les milieux gauche et droite du mur en regardant ce dernier sur la tranche.

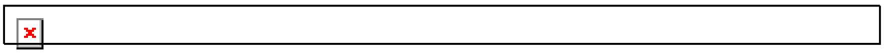
La continuité des pressions indique :

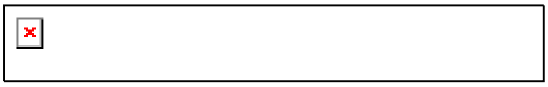
Ce qui s'écrit avec le principe fondamental de la dynamique :

La vitesse transmise est :

Calculons à présent le coefficient de transmission :







En régime harmonique l'opérateur de dérivation revient à multiplier par iw (*cf éléments relatifs aux transformées de Fourrier dans l'article évoquant la saturation)*.

D'où le coefficient de transmission :

Nous avons supposé dans la seconde égalité que les deux milieux (1) et (2) étaient les mêmes.

Nous reconnaissons la transmitance complexe d'un filtre passe bas. Ceci exprime mathématiquement le constat que basse et batterie *(grosse caisse)* passent bien mieux au travers les murs que les guitares flutes violon etc.

Résolution plus générale de l'équation de propagation

Nous poursuivons ci après l'étude dans un guide d'onde, une structure de surface rectangulaire de hauteur H portée par l'axe ox, de longueur L portée par l'axe oy. L'axe Oz suivant lequel va se propager le son. En bref une sorte de flute rectangulaire.

De la même manière on cherche une solution de la forme :

En injectant dans l'équation de propagation il vient assez simplement :

On pose :

Il y’a donc superposition de plusieurs modes de vibration. Tout d’abord exprimons Kz :

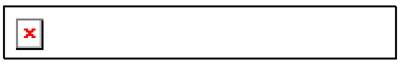
Deux possibilités ayant un sens physique, Kz est réel, dans ce cas on observe un phénomène d’oscillation suivant oz. Si Kz est imaginaire pur l’onde ne se propage pas, elle s’atténue le long de oz. Pour que le mode (m,n) puisse se propager, la plus petite valeur réelle pour Kz^2 est 0. La fréquence obtenue est dite fréquence de coupure :

Dans cette situation nous avons :

Il n’y a pas de propagation suivant l’axe oz. Lorsque la fréquence est au dessus de la fréquence de coupure le mode (m,n) associé peu se propager.

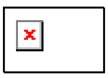
Impédance, modèle mathématique simplifié pour l’étude des fréquences de résonnance des structures

A présent on se place dans l’hypothèse onde plane, c'est-à-dire qu’il n’y’a pas de gradient de pression suivant ox et oy. Dans cette situation *(par exemple H et L très long et en se situant sur l’axe de symétrie de la structure)* la propagation est de la forme :

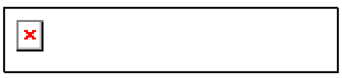


Impédance acoustique

Nous définissons l’impédance locale par :



On peut calculer la valeur simplement dans le cadre de l’hypothèse d’onde plane, dans ce cas nous avons vue deux fronts qui se déplacent dans des directions différentes :



L’équation d’Euler indique :

Ainsi dans le cadre d’un front d’onde, gradient nul suivant x et y par exemple, l’impédance vaut :

Signe positif pour l’onde f+ et négatif pour l’onde de « retour ».

Calcul de proche en proche des champs de pression et débit acoustique

Nous nous plaçons à présent toujours dans le cas simple de front d’onde, dans ce cas nous définissons le débit de matière par . Où S est la section.

On considère deux points de l’axe oz, .

On cherche une relation linéaire de la forme :

Avec A opérateur linéaire, dépendant d’un paramètre continu dz=z2-z1.

On rappel que :

,

On obtient une relation de proche en proche :

On peut linéariser cette relation simplement :

Considérons le lieu de propagation de longueur L, supposons que l'impédance de charge, c'est-à-dire en z=L soit nulle *(par exemple le vide : ce qui n'a pas vraiment de réalité physique)*.

On montre sans difficulté que :

Calcul des fréquences de résonnance d'un tube

Ainsi si l'impédance de charge, à la sortie (z2=L) est nulle :

Dans le cas d'une impédance d'entrée nulle, ce qui correspond à une ouverture ouverte sur un nœud de vibration :

Les fréquences possibles sont limitées, toutes proportionnelles à une fondamentale :

Si en revanche en z=0 on a quelque chose de rigide, alors l'impédance est infinie dans ce cas :

Ce cas assimilable à des instruments à vent avec embouchure type à anche, seules les harmoniques impaires de la fondamentale sont générées.

Considérons à présent un tube de longueur L, en y=L/2 un trou de hauteur h.

Nous supposons qu'il y'a continuité de la pression, ainsi p1=p2=p3 *(p1 à gauche de la section haute, p3 à droite et p2 dans la section montante)*.

Nous supposons aussi que la somme des vitesses est nulle, ainsi :

Les impédances sont, en supposant la charge nulle aux trois extrémités :

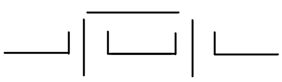
D'autre part :

En y=L/2 cela donne :

En simplifiant l'expression précédente à l'aide des formules classiques de trigonométrie, on trouve que la relation de dispersion est donnée par :

Cherchons à résoudre cette équation, on cherche la fréquence fondamentale, premier zéro positif de l'expression. Pour cela en traçant les courbes associées dans le plan en k et supposant h très petit devant l, la pente de -2kh est faible et coupe la fonction tangente légèrement à gauche de son zéro *(ce dernier étant atteint au point d'abscisse)* :

Nous constatons que la fréquence fondamentale est double que dans le cas précédent. Par définition on est à l'octave.



Ainsi cherchons dans l'air la longueur du tuyau pour une fréquence de 440 Hz. On trouve sans difficulté 38 cm. Si on veut l'octave, la fréquence double donc 880 Hz et donc L = 19 cm. à la moitie du tube on trouve l’octave etc.

Aspects énergétiques

Nous allons évoquer à présent les aspects énergétiques. Nous allons mettre en évidence ici qu'on peut atténuer l'effet d'une source sonore par une autre … bruit + bruit = silence.

Bilan énergétique

Pour cela rappelons quelques équations établies toute en première partie:

En intégrant :

En remarquant :

Ainsi le flux de l'intensité au travers d'une surface fermée donnée représente une puissance de rayonnement *(dérivée d'une énergie par rapport au paramètre temps)*.

Le terme comportant la vitesse traduit une densité d'énergie cinétique et le terme en pression une densité d'énergie potentielle. Nous admettons ici que la puissance d'une source sonore se calcule par la partie réelle de son débit conjugué et de sa pression.

Atténuation d'une source sonore par une autre

Considérons un tuyau de longueur infinie et de section S donnée. Plaçons-nous dans l'hypothèse d'ondes planes se propageant suivant l'axe ox. En un point d'abscisse y on place une source sonore harmonique notée qp. La vitesse de l'onde est notée U(+) dans le sens des x croissants et U(-) dans le sens des y décroissants.

Nous allons déterminer le champ de pression. Plaçons nous en x>y, la contribution U(+) entre en ligne de compte.

L'équation d'Euler donne :

La pression est de la forme :

On trouve donc :

En écrivant la continuité des pressions en x=y :

Ecrivons aussi la conservation des débits :

Le champ des pressions est alors donné par les équations :

Au point d'abscisse y=L on place une seconde source, dite secondaire.

La linéarité de l'équation d'Helmholtz induit que la pression totale est la somme des pressions. Ainsi :

Cherchons la relation entre les deux sources sonores pour annuler la pression en tout point x>L.

Le calcul de la puissance délivrée par la source (en x=0) est :

Sans la source secondaire la puissance délivrée serait :

Le rapport est donc :

Ce rapport est minimal lorsqu'il s'annule pare exemple, donc :

Effectuons quelques calculs numériques :

A 20°Celsius la vitesse du son, c, est de l’ordre de 340 m/s. Considérons un signal harmonique de 440 Hz. Les positions minimisant la puissance diffusée sont données par :

Donc 27cm 54cm 81cm 108cm 135cm 162cm …

Avec la source secondaire un coup sur deux en opposition de phase avec la source primaire.

Conclusion

Dans un premier document nous avons abordé les gammes, ceci en nous basant sur l'étude d'une corde vibrante. Ainsi nous avons vue qu'à tension et densité de masse donnée, la longueur de la corde fige une suite d'harmoniques. Une fondamentale, qu'on entend mieux et d'autres qui contribuent au timbre de l'instrument. Nous avons évoqué un rapport entre fréquences « harmonieux », le rapport de quinte. A partir de ce rapport de fréquences nous avons construit un premier modèle de Game. La Game dite de Pythagore basée sur douze demis tons. Nous avons ensuite évoqué d'autres constructions en terminant par une approche mathématique consistant à baser le rapport entre deux tonalités successives à la racine douzième de deux. Toutefois en nous éloignant légèrement de certains rapports « harmonieux », cependant dans des proportions peu perceptibles à l'oreille. Ce compromis est trouvé avec la gamme tempérée sur laquelle on « accorde » par exemple « naturellement » nos guitares.

Le second document un peu plus étoffé sur le plan des mathématiques s'est intéressé à la forme des signaux *(physique)* dans un cadre un peu plus général. Nous avons évoqué que tout signal d'énergie finie et suffisamment continu est décomposable en une infinité de signaux élémentaires. Les fonctions trigonométriques de base *(généralisée par l'exponentielle complexe)* représentant une pulsation idéale. Nous avons alors observé d'un peu plus prêt le comportement du son au travers des dispositifs d'amplification et introduit la distorsion sur un plan formel. Nous avons ensuite visité quelques notions empruntées à l'automatique pour aborder la question de la stabilité des systèmes linéaires et évoquer en finalité l'effet Larsen.

Dans le troisième document nous avons été au devant de quelques structures mathématiques engendrant des pans assez larges des sciences physique. Le principe de moindre action portant la dynamique classique, la mécanique relativiste, la théorie du champ électromagnétique jusqu'à quelques résultats de relativité générale. Nous avons évoqué succinctement la guitare électrique par le biais du champ électromagnétique, de l'induction induite dans les micros etc. Il ressort de ce document une équation différentielle portant les champs. Une équation linéaire, dont les harmoniques sont solutions, et dont les solutions sont la somme *(superposition)* de ces harmoniques. Ce signal de base, élémentaire qui constitue un outil mathématique intéressant, qui n'a pas de réalité physique et pourtant qu'on entend.

Ce dernier document articulé s'est attaché au phénomène sonore. A sa manifestation dans le milieu sous la forme d'un champ de pression. Nous avons développé quelques outils de base pour formaliser quelques phénomènes courant.

Ci-joint un dernier document abordant la question sur un plan physique. Vu comme un champ de pression, nous retrouvons un certain nombre de relations qui permettent d'établir une théorie simplifiée des phénomènes acoustiques. Ainsi outillé nous explorons une fois encore les modes de vibration d'une corde, nous explorons les fréquences de résonnance d'un flute (idéalisé par un tuyau) nous observerons le comportement du son au travers un mur (évoquant le fait que les basses passent bien mieux que les fréquences élevées), verrons pourquoi le timbre est plus aigue lorsqu'on gratte les cordes proche du chevalet, et terminerons en évoquant très succinctement quelques aspects énergétiques en montrant comment une source sonore peut en atténuer une autre.

Eléments d'analyse tensorielle

Soit E un espace vectoriel de dimension n et défini sur un corps K. sur cet espace nous considérons une base de vecteurs :

Soit f une application linéaire de E vers K, un tel objet est appelé forme linéaire définie sur E. on montre sans difficultés que l'ensemble des formes linéaires définie sur E est aussi un espace vectoriel qu'on dira dual et notera E*.

Notre forme linéaire f s'exprime alors :

Nous pouvons considérer les projecteurs de E vers un de ses axes. Par exemple la projection sur l'axe i est une forme linéaire :

Ainsi défini l'expression exacte est donnée ci-dessous en ayant introduit la notation de Kronecker:

Alors les formes linéaires peuvent être considérées comme engendrées par :

Nous allons considérer à présent les formes bilinéaires, appliquant linéairement un couple d'espace vectoriel définis sur un même corps vers ce corps.

Sur le plan géométrique nous avons là encore une forme de projection, en effet :

Si la base est bien choisie de sorte à ce que :

On retrouve bien la projection sur l'axe d'indice i. Considérons à présent la forme linéaire suivante :

Nous avons introduit ici un opérateur supplémentaire, les formes 1-linéaires introduites sont les projecteurs de E* par exemple.

Dans ce cas nous avons immédiatement :

Et donc un système générateur des formes bilinéaires :

Maintenant que nous avons évoqué la notion d'espace dual, que l'espace dual était aussi un espace vectoriel, donc sur lequel on peut définir des formes linéaires et bilinéaires (voir n linéaires) nous allons nous pencher sur la question des changements de base. Ce point est très important en physique.

Pour préciser les choses on se donne une première base dans laquelle on exprime les vecteurs, puis une seconde base repérée par le symbole prime (').

Ainsi nous constatons que la relation lie les coordonnées exprimées dans la base initiale en fonction de celle exprimées dans la base finale. Une telle transformation sera dite contra variante.

Observons à présent ce qui se passe au niveau d'une forme bilinéaire :

Ainsi :

Contrairement au cas des vecteurs, ici les formes bilinéaires ont une loi de transformation lors d'un changement de base exprimant les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. Ont dit ici que la transformation est deux fois covariante.

Considérons à présent une forme bilinéaire définie sur l'espace dual de E. Cette forme a pour arguments deux formes linéaires que nous notons ainsi :

Nous avons les relations suivantes :

Or :